第一章 线性空间与内积空间

集合论是现代数学的一个重要基础.在集合中赋予不同的结构,如代数、度量、范数、内积、测度等结构,可以构成不同的抽象空间.本章前两节简要介绍集合与映射、线性空间与线性算子的基本概念和性质,规范本书中采用的有关术语和记号.在后两节中,将研究内积空间及内积空间中的正交系.

§1.1 集合与映射

关于集合与映射的基本概念和性质概括叙述于本节中,本书中采用的有关集合与映射的术语和记号在这里作一个明确的交待,以后引用时不再一一说明.

一、集合及其运算

集合(或称为集)是数学中一个最基本的概念,也是人们能够直观理解的一个概念.如同几何中的"点"与"直线"的概念一样,很难给"集合"下一个严格的定义.所谓集合,就是指具有确定的或适合一定条件的事物的全体.组成集合的这些"事物"称为集合的元素.若 A 是集合,x 是 A 的元素,则记为 $x\in A$;若 x 不是 A 的元素,则记为 $x\notin A$.

集合常用大写字母表示,集合的元素常用小写字母表示.通常,表示集合的方法采用列举法和描述法.

如果集合 A 的所有元素都能列举出来,则可把它们写在大括号里表示该集合 A.例如由元素 a,b,c 所组成的集合记为

$$\{a,b,c\}.$$

应该注意,a 与 $\{a\}$ 是不同的.a 表示一个元素;而 $\{a\}$ 表示仅

含有一个元素 a 的集合,称之为单元素集.

如果集合 A 是由满足某种条件或性质 $p(x)$ 的元素 x 的全体所组成,则可记 A 为

$$\{x \mid p(x)\}.$$

例如,方程 $x^2-1=0$ 的实数解的全体组成的集合可记为

$$\{x \mid x^2-1=0\}.$$

显然,这个集合也可以用列举法表示为 $\{-1,1\}$.

只含有限个元素的集合称为**有限集**.不含任何元素的集合称为**空集**,空集常记为 $\varnothing$.既非空集又非有限集的集合称为**无限集**.

设 A 和 B 是两个集合,若对于每一个 $x\in A$ 必有 $x\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$),也称 A 含于 B(或 B 包含 A).若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,即 A 与 B 中的元素完全相同,则称 A 和 B 相等,记为 $A=B$.若 A 和 B 不相等,则记为 $A\neq B$.若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A\subsetneqq B$,读作 A 真包含于 B.

对于任意的集 A,规定 $\varnothing\subset A$.

常用集合记号如下:

$\mathbb{N}$　表示全体自然数组成的集合,即

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$;

$\mathbb{Z}$　表示全体整数组成的集合,即

$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$;

$\mathbb{R}$　表示全体实数组成的集合(有时也称 $\mathbb{R}$ 为数直线);

$\mathbb{Q}$　表示全体有理数组成的集合;

$\mathbb{C}$　表示全体复数组成的集合.

定义 1.1　设 A 和 B 是两个集合.

(1) 由集 A 与集 B 共有的元素组成的集称为 A 与 B 的交,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

(2) 由集 A 与集 B 的所有元素组成的集称为 A 与 B 的并,记

为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

(3) 由属于集 A 而不属于集 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的差，记为 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

(4) 若 $B\subset A$，则差集 $A\setminus B$ 称为 B 关于 A 的余集或补集. 当所讨论的集合皆为某一个固定集 X(称之为基本集)的子集时，X 的子集 B 关于 X 的余集称为 B 的余集，记为 B^C，即

$$B^C=X\setminus B.$$

两个集的交与并的定义可以推广到更一般的情况.

设 D 是一个非空集，当 α 遍取集 D 时，$\{A_\alpha\mid \alpha\in D\}$ 是所有以集 A_α 为元素的集合，称之为以 D 为指标集的集族. 这一集族的交 $\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$ 与并 $\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$ 定义为：

$$\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x\mid \text{对于每一个 } \alpha\in D \text{ 皆有 } x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha=\{x\mid \text{存在 } \alpha\in D\text{，使得 } x\in A_\alpha\}.$$

当 $D=\mathbb{N}$ 时，$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$ 和 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$ 可分别记为 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 和 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

例 1.1 数直线 $\mathbb{R}$ 上的闭区间 $[0,1]$ 表示所有满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的实数 x 的全体，因此

$$[0,1]=\{x\mid x\in\mathbb{R},0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

上式右端也可记为 $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$. 当视 $\mathbb{R}$ 为基本集时，还可简记为 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

例 1.2 设 $\mathbb{Q}^+$ 为全体正有理数组成的集，由于每一个正有理数都可以表示为 $\frac{p}{q}$ 的形式(其中 $p,q\in\mathbb{N}$)，对于每一个 $q\in\mathbb{N}$，令

$$A_q=\{\frac{1}{q},\frac{2}{q},\frac{3}{q},\cdots\},$$

则有 $\mathbb{Q}^+=\bigcup\limits_{q=1}^{\infty}A_q$.

例 1.3 设 E 是数直线$\mathbb{R}$中所有开区间的全体组成的集，则

$$E=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},a<b\}.$$

E 的元素(a,b)是开区间.

从上面的定义，容易得到下面各条性质.

(1) 对于任何集 A,B,C，下列性质成立：

幂等性 $A\cup A=A, A\cap A=A$；

传递性 若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

(2) 设 X 是基本集，对于任何集 A,B，则有

$$A\backslash B=A\cap B^C;$$

$$A\cup A^C=X,\ A\cap A^C=\varnothing;$$

$$X^C=\varnothing,\ \varnothing^C=X;$$

$$(A^C)^C=A;$$

若 $A\subset B$，则 $A^C\supset B^C$；

若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^C$ 且 $B\subset A^C$.

定理 1.1 设$\{A_\alpha\mid\alpha\in D\}$是一个集族，$A,B,C$ 是任意的集，则下列运算性质成立：

(1) 交换律 $A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A$；

(2) 结合律 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(3) 分配律 $(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cup A=\bigcap\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha\cup A)$，

$(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap A=\bigcup\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$.

证明 只证(3)的第二式，其余的证明方法类似.

对于任意 $x\in(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap A$，则 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha$ 且 $x\in A$. 于是存在 $\alpha\in D$ 使 $x\in A_\alpha$ 且 $x\in A$，从而 $x\in A_\alpha\cap A$，故 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$. 这表明包含关系$(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap A\subset\bigcup\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$成立.

另一方面，对于任意 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$，则存在 $\alpha\in D$，使得

$x\in A_\alpha\cap A$，从而 $x\in A_\alpha$ 且 $x\in A$，故 $x\in(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap A$. 这表明包含关系 $\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)\subset(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap A$ 成立.

综上所述，等式 $(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)\cap A=\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$ 得证.

定理 1.2 设 X 是基本集，$\{A_\alpha|\alpha\in D\}$ 是一集族，则下列运算满足对偶原理：

$$(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)^C=\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha{}^C,$$

$$(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha)^C=\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha{}^C.$$

上面二式称为 de Morgan 公式.

证明 先证第一式. 对于每一个 $x\in(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)^C$，即 $x\notin\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$，则对于每一个 $\alpha\in D$ 皆有 $x\notin A_\alpha$，从而 $x\in A_\alpha^C$，故 $x\in\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^C$. 于是 $(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)^C\subset\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^C$.

另一方面，对于每一个 $x\in\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^C$，则对于每一个 $\alpha\in D$ 皆有 $x\in A_\alpha^C$，从而 $x\notin A_\alpha$，故 $x\notin\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$，即 $x\in(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)^C$. 于是 $\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^C\subset(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)^C$. 第一式得证.

对第一式两端取余集得到

$$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha=((\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)^C)^C=(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^C)^C.$$

由于上式对任意的集族 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$ 成立，若把 A_α 换为 A_α^C，则第二式得证.

一般来讲，对于任意的集 E 及集族 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$，de Morgan 公式有下列形式

$$E\backslash\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in D}(E\backslash A_\alpha),$$

$$E\backslash\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in D}(E\backslash A_\alpha).$$

具体证明留给读者自己去完成.

下面介绍集合的直积的概念.

定义 1.2 设 A 和 B 是两个集. 对于 $a\in A$ 及 $b\in B$，以 (a,b)

表示一个有次序的元素对，简称为序对. 序对(a,b)的次序规定为，先 A 中的元素 a，后 B 中的元素 b. $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$是指 $a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$. 所有由 A 中的元素 a 及 B 中的元素 b 构成的序对(a,b)的全体组成的集合记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}.$$

$A\times B$ 称为 A 与 B 的直积(或称为 Descartes 乘积).

当 A 和 B 中有一个为空集时，规定 $A\times B=\varnothing$.

类似地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$是 n 个集合，则它们的直积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$(或记为 $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$)定义为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in A_i,i=1,\cdots,n\},$$

即所有有次序的元素组$(a_1,\cdots,a_n)$的全体组成的集合. 其中每一个 $A_i(i=1,\cdots,n)$称为此直积的坐标集.

例如，两个数直线$\mathbb{R}$ 的直积就是实平面$\mathbb{R}^2$，即$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$是 n 个数直线$\mathbb{R}$ 的直积. 同样，$\mathbb{C}^n$ 是 n 个$\mathbb{C}$ 的直积.

二、映射及其性质

在微积分中我们熟悉的函数实质上是实数集$\mathbb{R}$ 的子集 A 到$\mathbb{R}$ 的一种对应关系. 这里，更为一般地给出两个集合的映射的概念，它是两个集合之间的一种对应关系.

定义 1.3 设 A 和 B 是两个非空集. 若存在一个对应规律 f，使得对于每一个 $x\in A$ 有唯一的 $y\in B$ 与之对应，则 f 称为 A 到 B 的映射(也称为算子或变换)，记为

$$f:A\to B,$$

或者

$$f:x\mapsto y\qquad(x\in A).$$

y 称为 x 在映射 f 下的象，记为 $y=f(x)$或 $y=fx$. 集 A 称为映射 f 的定义域，记为 $\mathscr{D}(f)$. 集

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

称为映射 f 的值域，记为 $\mathscr{R}(f)$.

若 $A_1\subset A$，记

$$f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\},$$

则 $f(A_1)$称为 A_1 在映射 f 下的象；若 $B_1\subset B$，记

$$f^{-1}(B_1)=\{x\in A\mid f(x)\in B_1\},$$

则 $f^{-1}(B_1)$称为 B_1 在映射 f 下的**逆象**（或原象）. 对于 $y\in B$，单元素集$\{y\}$在映射 f 下的逆象 $f^{-1}(\{y\})$简记为 $f^{-1}(y)$，即

$$f^{-1}(y)=\{x\in A\mid f(x)=y\}.$$

$f^{-1}(y)$也称为 y 在映射 f 下的逆象.

值得注意，$f^{-1}(y)$是 A 中的集合，可能不只包含一个元素，但是 $f^{-1}(y)$中每一个元素的象都是 y. 还应指出，$f^{-1}(y)$与 $f^{-1}(B_1)$一样都应看作为一个整体记号.

特别地，对于映射 $f: A\to B$，当 B 为数集（例如 $B\subset\mathbb{R}$ 或 $B\subset\mathbb{C}$）时，映射 f 通常称为**泛函**；当 A 与 B 皆为数集时，f 就是通常所说的函数.

定义 1.4 设映射 $f: A\to B$.

(1) 若 $\mathscr{R}(f)=B$，则 f 称为**满射**，或者称为 A 到 B 上的映射.

(2) 若对于每一个 $y\in\mathscr{R}(f)$，存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$（等价地说，对于 A 中任意的元素 x_1 和 x_2，若 $x_1\neq x_2$ 就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$），则 f 称为**单射**，或称为 A 到 B 的一一映射.

(3) 若 f 既是满射又是单射，则 f 称为**双射**，或称为 A 到 B 上的一一映射.

(4) 当 f 是单射时，对于每一个 $y\in\mathscr{R}(f)$，由关系式 $f(x)=y$ 可确定一个唯一的 $x\in A$ 与之对应，于是得到了一个 $\mathscr{R}(f)$到 A 的映射，记为

$$f^{-1}: \mathscr{R}(f)\to A.$$

f^{-1}称为 f 的**逆映射**. 当 f 是双射时，f 的逆映射为

$$f^{-1}: B \to A.$$

定义 1.5 对于映射 $f: A \to B$ 和映射 $g: B \to C$，对每一个 $x \in A$ 有 $f(x) \in B$，则

$$x \mapsto g(f(x)) \quad (x \in A)$$

是一个 A 到 C 的映射，记为 $g \circ f: A \to C$，称 $g \circ f$ 为 f 与 g 的复合映射.

下面给出两个特殊的映射.

例 1.4 若映射 $f: A \to B$ 定义为，对于每一个 $x \in A$ 皆有

$$f(x) = y_0$$

(其中 $y_0 \in B$)，则 f 称为常值映射. 这时 $\mathscr{R}(f) = \{y_0\}$.

例 1.5 设 A 为非空集合. 定义映射 $I: A \to A$ 使得对每一个 $x \in A$

$$I(x) = x,$$

则映射 I 称为 A 上的恒等映射. 显然，恒等映射是双射.

定理 1.3 对于映射 $f: A \to B$ 和映射 $g: B \to C$，下列结论成立.

(1) 对于任意的 $E \subset A$ 和 $F \subset B$，有

$$E \subset f^{-1}(f(E)),$$
$$f(f^{-1}(F)) \subset F,$$
$$f^{-1}(F^C) = (f^{-1}(F))^C.$$

当 f 是满射时，$f(f^{-1}(F)) = F$；当 f 是单射时，$f^{-1}(f(E)) = E$.

(2) 对于 $A_\alpha \subset A(\alpha \in D)$ 及 $B_\alpha \subset B(\alpha \in D)$，有

$$f(\bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in D} f(A_\alpha),$$
$$f(\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in D} f(A_\alpha),$$
$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in D} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in D} f^{-1}(B_\alpha),$$
$$f^{-1}(\bigcap_{\alpha \in D} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in D} f^{-1}(B_\alpha).$$

当 f 是单射时，$f(\bigcap_{\alpha \in D} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in D} f(A_\alpha)$.

(3) 若 f 是双射，则 $f^{-1}: B\to A$ 也是双射，且 $f^{-1}\circ f$ 和 $f\circ f^{-1}$ 分别是 A 和 B 上的恒等映射.

(4) 若 f,g 是满射，则 $g\circ f$ 也是满射. 若 f,g 是单射，则 $g\circ f$ 也是单射. 若 f,g 是双射，则 $g\circ f$ 也是双射.

此定理的证明不难由有关定义直接推出，下面举例说明定理中的三处包含关系可以是真包含关系.

例 1.6 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$. 定义 $f: A\to B$ 使得

$$f(1)=a,$$
$$f(2)=b,$$
$$f(3)=b.$$

记 $E=\{2\}$，$F=\{b,c\}$，则

$$E\subsetneqq\{2,3\}=f^{-1}(f(E)),$$
$$f(f^{-1}(F))=\{b\}\subsetneqq F.$$

记 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{1,3\}$，则

$$f(A_1\cap A_2)=\{a\}\subsetneqq\{a,b\}=f(A_1)\cap f(A_2).$$

三、可数集

在集合的分类方法中，如下定义具有重要的意义.

定义 1.6 设 A 和 B 是两个集合，若存在一个双射 $f: A\to B$，则称 A 与 B 是对等的，记为 $A\sim B$. 若 A 与 B 是对等的，则称 A 与 B 有相同的**基数**(或势).

关于集合之间的对等关系具有如下明显的性质：

(1) 自反性　$A\sim A$，

(2) 对称性　若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$，

(3) 传递性　若 $A\sim B$ 且 $B\sim C$ 则 $A\sim C$.

值得注意，$A\sim B$ 与 $A=B$ 具有不同的含义. 换句话说，对等的两个集合不一定是相等的. 对于有限集 A 和 B 而言，$A\sim B$ 等价于它们的元素的个数是相同的. 因此，任意两个元素个数相同的有限集有相同的基数. 可以规定：含有 n 个元素的有限集的基数为

n；空集的基数为 0. 但是，对于有限集的按元素个数的分类方法不能照搬到无限集中去. 对于无限集而言，定义 1.6 提供了一种有效的分类方法. 无限集中一种常用的集合可作如下定义.

定义 1.7 凡与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集称为**可数集**或**可列集**. 不是可数集的无限集称为**不可数集**. 有限集和可数集统称为**至多可数集**.

例 1.7 正奇数的全体组成的集 $\mathbb{N}_1$，正偶数的全体组成的集 $\mathbb{N}_2$，整数的全体组成的集 $\mathbb{Z}$ 都是可数集，因为这些集都与 $\mathbb{N}$ 对等. 例如，定义映射 f 使得 $f(n)=2n(n\in\mathbb{N})$，则 f 是 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}_2$ 的双射.

若 A 是可数集，即 $A\sim\mathbb{N}$，则存在双射 $f:\mathbb{N}\to A$. 对每一个 $n\in\mathbb{N}$，记 $a_n=f(n)\in A$. 因 f 是双射，故 A 中所有的元素可以用自然数编号，或者说 A 中的元素可以排列成无穷序列的形式，即

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}. \tag{1.1}$$

反之，若一个集合 A 中的元素可以排列成无穷序列(1.1)的形式，则映射

$$f:n\mapsto a_n\quad(n\in\mathbb{N})$$

是 $\mathbb{N}$ 到 A 的双射，故 $\mathbb{N}\sim A$，即 A 是可数集.

因此，A 是可数集的充分必要条件是 A 的元素可以排列成无穷序列(1.1)的形式.

可数集是一类无限集，然而不是可数集的无限集是很多的. 例如数直线 $\mathbb{R}$ 以及 $\mathbb{R}$ 上的区间都是不可数的无限集. 下面主要研究可数集及其性质.

定理 1.4 下列各结论成立：

(1) 可数集的子集是至多可数集；

(2) 有限或可数多个可数集的并是可数集；

(3) 有限个可数集的直积是可数集.

证明 (1) 设 A 为可数集，则 A 中的元素可以排列成无穷序列

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}. \tag{1.2}$$

设 B 是 A 的子集(不妨设 $B \neq \varnothing$),在(1.2)中按排列次序把属于 B 的元素逐一挑选出来,记第 k 次挑选出来的元素为 a_{n_k}. 若 B 不是有限集,则 B 中的元素可排列成

$$\{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\},$$

因而 B 是可数集.

(2) 只要证明可数多个可数集的并是可数集. 设有可数多个可数集 $A_n(n=1,2,\cdots)$. 将每一个可数集 A_n 的元素排列如下:

$$\begin{array}{lllll}
A_1: & a_{11}, \rightarrow & a_{12}, & a_{13}, \rightarrow & a_{14}, \cdots \\
 & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \\
A_2: & a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, \cdots \\
 & \downarrow \; \nearrow & \swarrow & & \\
A_3: & a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, \cdots \\
 & \swarrow & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_n: & a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & a_{n4}, \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

按上面箭头指向的顺序排列得到

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, \cdots\}.$$

从中删去重复的元素. 这样, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 中的元素可以排成一个无穷序列,故它是可数集.

(3) 证明留给读者.

例 1.8 全体有理数组成的集合 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

证明 设 $\mathbb{Q}^+$ 和 $\mathbb{Q}^-$ 分别表示全体正有理数和全体负有理数组成的集,则

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-.$$

由例 1.2 知，

$$\mathbb{Q}^+=\bigcup_{q=1}^{\infty}A_q,\text{其中 }A_q=\{\frac{1}{q},\frac{2}{q},\frac{3}{q},\cdots\}.$$

根据定理 1.4(2)，$\mathbb{Q}^+$ 是可数集. 易知 $\mathbb{Q}^+\sim\mathbb{Q}^-$，故 $\mathbb{Q}^-$ 是可数集. 再应用定理 1.4(2)，则 $\mathbb{Q}$ 是可数集得证.

四、实数集的确界

在本段中，首先介绍实数集合的上确界和下确界的概念，然后给出确界存在原理. 此原理可以看作为实数的完备性公理体系的一部分.

本段中所涉及到的集合皆为数直线 $\mathbb{R}$ 的子集.

设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的非空集合，a 和 b 是两个实数. 若对于每一个 $x\in E$ 皆有 $x\leqslant b$，则 b 称为 E 的上界；若对于每一个 $x\in E$ 皆有 $a\leqslant x$，则 a 称为 E 的下界.

显然，若 E 有一个上界 b，则 E 的上界不是唯一的，因为任何大于 b 的数都是 E 的上界. 同样，若 E 有一个下界，则 E 的下界也不是唯一的. 对于实数集 E 而言，是否存在最小上界和最大下界？这是更为关注的问题. 下面对于一般实数集的最小上界和最大下界给予一个确切的定义.

定义 1.8 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的非空集合.

(1) 若存在一个实数 μ 满足下列两个条件：

(a) 对于每一个 $x\in E$ 皆有 $x\leqslant\mu$，

(b) 对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in E$ 使得 $x_0>\mu-\varepsilon$，

则 μ 称为 E 的**上确界**，记为

$$\mu=\sup E,\text{或 }\mu=\sup\{x\mid x\in E\}.$$

(2) 若存在一个实数 ν 满足下列两个条件：

(a) 对于每一个 $x\in E$ 皆有 $x\geqslant\nu$，

(b) 对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in E$ 使得 $x_0<\nu+\varepsilon$，

则 ν 称为 E 的**下确界**，记为

$$\nu=\inf E, \text{或 } \nu=\inf\{x \mid x\in E\}.$$

由此定义，当 μ 是 E 的上确界时，μ 满足的第一个条件意味着 μ 是 E 的一个上界，而第二个条件表明凡小于 μ 的任何数都不是 E 的上界. 因此，“μ 是 E 的上确界”就是“μ 是 E 的最小上界”之意.

同样，“ν 是 E 的下确界”就是“ν 是 E 的最大下界”之意.

注意，并非所有的集合都存在上确界和下确界. 比如，自然数集 $\mathbb{N}$ 的上确界不存在. 那么，满足什么条件的集合存在上确界和下确界呢？下面的确界存在原理回答了这个问题. 由于实数的完备性理论包含了若干互相等价的结论，只要把其中任意一个结论作为公理(或原理)，据此可以推出其它的结论. 因此，这些互相等价的结论组成了实数完备性公理体系. 由于这个原因，可以把确界存在原理作为一个公理来看，当然从直观上也很容易理解它的合理性.

确界存在原理 任何非空有上界的实数集必有上确界；任何非空有下界的实数集必有下确界.

应用确界存在原理可以证明下面的单调有界准则.

定理 1.5 单调有界数列必有极限.

证明 设 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列. 由确界存在原理，$\{x_n\}$ 有上确界 μ，即

$$\mu=\sup\{x_n \mid n\in \mathbb{N}\}.$$

现在证明，μ 就是数列 $\{x_n\}$ 的极限，即 $x_n\to\mu$.

事实上，对任意 $\varepsilon>0$，由上确界的定义，存在 $x_N\in\{x_n\}$ 使得

$$\mu-\varepsilon<x_N\leqslant\mu.$$

由于 $\{x_n\}$ 是单调增加的，因此当 $n>N$ 时，有

$$\mu-\varepsilon<x_N\leqslant x_n\leqslant\mu,$$

从而 $|x_n-\mu|<\varepsilon$. 这就证明了 $x_n\to\mu$.

同样可以证明单调减少有下界的数列的极限存在，并且其极

限就是此数列的下确界.

§1.2 线性空间

赋予线性结构且满足适当条件的集合构成为线性空间. 在线性代数中, $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 是已为大家熟知的线性空间的具体例子. 本节主要介绍线性空间以及线性空间上的线性算子的基本概念和性质.

一、线性空间的定义和例子

本书中也用 $\mathbb{R}$ 表示实数域, $\mathbb{C}$ 表示复数域. 为了叙述方便, 用 $\mathbb{K}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或者复数域 $\mathbb{C}$.

定义 1.9 设 X 是一个非空集合. 若在 X 中任意二元素之间可以定义加法运算"+", 在 $\mathbb{K}$ 中的数与 X 中的元素之间可以定义数乘运算"·", 并且满足下述条件:

加法运算"+"(即对任意 $x, y \in X, x+y \in X$)对任意 $x, y, z \in X$, 满足

(1) $x+y=y+x$;

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(3) 存在 $0 \in X$, 使得对一切 $x \in X$ 有 $x+0=x$(此元素 0 称为 X 的零元素);

(4) 对任意 $x \in X$, 存在 x 的加法逆元素, 记为 $-x$, 使得 $x+(-x)=0$.

数乘运算"·"(即对任意 $\alpha \in \mathbb{K}$ 以及任意 $x \in X$, 有 $\alpha \cdot x \in X$ (将 $\alpha \cdot x$ 简记为 αx))对任意 $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ 满足

(5) $1x=x$;

(6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

(7) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

(8) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

则 X 称为数域$\mathbb{K}$上的**线性空间**，或称为向量空间. 当$\mathbb{K}$是实数域$\mathbb{R}$时，X 称为实线性空间；当$\mathbb{K}$是复数域$\mathbb{C}$时，X 称为复线性空间.

线性空间 X 中的元素有时称为点或称为向量. X 上的加法运算和数乘运算统称为线性运算.

例 1.9 在集合$\mathbb{R}^n$上定义加法运算和数乘运算，使得对任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T, y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T\in\mathbb{R}^n$（这里$(\xi_1,\cdots,\xi_2)^T$表示行向量$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的转置，它是一个列向量），以及任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n)^T,$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\cdots,\alpha\xi_n)^T.$$

容易验证，$\mathbb{R}^n$ 是实线性空间.

例 1.10 在集合$\mathbb{C}^n$上，对任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T, y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T\in\mathbb{C}^n$ 及 $\alpha\in\mathbb{C}$，定义加法运算和数乘运算如同上例. 容易验证，$\mathbb{C}^n$ 是复线性空间.

例 1.11 $C[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上实值（或复值）连续函数的全体组成的集合. 按照通常的函数的加法和数乘定义其上的线性运算，即对任意 $x,y\in C[a,b]$及任意 $\alpha\in\mathbb{R}$（或$\mathbb{C}$），

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t), \qquad (t\in[a,b]).$$

容易验证，$C[a,b]$是线性空间.

例1.12 $\mathbb{C}^{n\times n}$表示 $n\times n$ 复方阵的全体组成的集合. 按照通常的方阵加法和数乘定义其上的线性运算，即对任意

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$$

及 $\alpha\in\mathbb{C}$，

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\alpha A=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nn}\end{bmatrix}.$$

容易验证，$\mathbb{C}^{n\times n}$是线性空间.

同样，$n\times n$ 实方阵的全体组成的集合$\mathbb{R}^{n\times n}$在实数域$\mathbb{R}$ 上按如同上面定义的线性运算成为线性空间.

例 1.13 $l^p(1\leqslant p<\infty)$表示满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$$

的实数(或复数)列$(\xi_1,\xi_2,\cdots)$的全体组成的集合. 对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$)，定义加法运算和数乘运算为

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots),$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots).$$

为了证明 $x+y\in l^p$，需要引用如下两个重要的不等式(详细证明可参见文献[1]，[2]，或[4]).

引理 1.1 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^q$ (这里 $p>1,q>1$ 且满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)，下面的 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

成立. 并且由此可知 $xy=(\xi_1\eta_1,\xi_2\eta_2,\cdots)\in l^1$.

引理 1.2 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p(1\leqslant p<\infty)$，Minkowski 不等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

成立.

应用 Minkowski 不等式，容易验证 l^p 是线性空间.

二、线性空间的子空间

定义 1.10 设 X 是线性空间，$\varnothing\neq Y\subset X$. 若对于任意 $x,y\in$

Y 和 $a\in\mathbb{K}$，有

$$x+y\in Y,\ ax\in Y,$$

则 Y 称为线性空间 X 的**线性子空间**，简称为 X 的子空间.

易知，线性空间 X 的线性子空间 Y 在 X 的线性运算下也是一个线性空间.

显然，线性空间 X 是它自己的子空间；仅含零元素的单元素集 $\{0\}$ 也是 X 的子空间. 这两个子空间称为 X 的平凡的子空间. 除上述两个平凡的子空间之外的子空间称为 X 的真子空间. 容易证明，线性空间 X 的任意多个子空间的交也是 X 的子空间. 但是，一般来说，X 的两个子空间的并可能不是 X 的子空间.

例 1.14 在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中，通过零点 $(0,0,0)$ 的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

线性空间 X 的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个线性组合是指这样一个表达式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

其中 $a_i\in\mathbb{K}(i=1,2,\cdots,n)$.

定义 1.11 设 X 是线性空间，$\varnothing\neq M\subset X$. 记

$$\mathrm{span}M=\{a_1x_1+\cdots+a_nx_n\,|\,x_i\in M,a_i\in\mathbb{K},i=1,\cdots,n,n\in\mathbb{N}\},$$

即 $\mathrm{span}M$ 是由 M 中任意有限个元素的线性组合的全体组成的集合. 易知，$\mathrm{span}M$ 是 X 的一个子空间. $\mathrm{span}M$ 称为 M **张成的**(或称为 M 生成的)**子空间**.

可以证明，$\mathrm{span}M$ 是线性空间 X 中包含 M 的最小子空间，换句话说，

$$\mathrm{span}M=\bigcap\{Y\,|\,Y\text{ 是 }X\text{ 的子空间且 }M\subset Y\}.$$

通常，将包含 M 的所有 X 的子空间的交称为 M 的**线性包**. 因此，$\mathrm{span}M$ 是 M 的线性包.

定义 1.12 设 M_1 和 M_2 是线性空间 X 的两个子空间.

(1) 记

$$M_1+M_2=\{x_1+x_2 \mid x_1\in M_1, x_2\in M_2\}.$$

显然,M_1+M_2 是 X 的子空间. M_1+M_2 称为 M_1 与 M_2 的**和**.

(2) 若对于每一个 $x\in M_1+M_2$ 存在唯一的 $x_1\in M_1$ 和 $x_2\in M_2$ 使得 $x=x_1+x_2$,则 X 的子空间 M_1 与 M_2 的和称为**直和**,记为

$$M_1\oplus M_2.$$

特别地,当 $X=M_1\oplus M_2$ 时,M_1 与 M_2 互称为补子空间.

容易证明,X 的子空间 M_1 与 M_2 的和是直和的充分必要条件是 $M_1\cap M_2=\{0\}$.

三、线性空间的基与维数

设 X 是线性空间,$M=\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$. 若关系式

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0 \tag{1.3}$$

(其中 $\alpha_i\in\mathbb{K}(i=1,2,\cdots,n)$)仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 时才成立,则集 M 称为是线性无关的. 若 M 不是线性无关的,则集 M 称为是线性相关的. 当 M 线性相关时,必存在一组不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得关系式(1.3)成立. 或者说,M 中必有一个元素可以表示为其它元素的线性组合. 因为这一组不全为零的数中,不妨设 $\alpha_1\neq0$,由关系式(1.3)可解出

$$x_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n,$$

即 x_1 可以表示为 $x_2,\cdots,x_n$ 的线性组合.

一般来说,设 M 是线性空间 X 的非空子集(不一定是有限集). 若 M 的每一个有限子集都是线性无关的,则集 M 称为是**线性无关的**. 若 M 不是线性无关的,则集 M 称为是**线性相关的**.

定义 1.13 设 X 是线性空间. 若存在一个正整数 n,满足

(1) X 包含一个由 n 个元素组成的线性无关集,

(2) 任何多于或等于 $n+1$ 个元素组成的集都是线性相关的,

则此正整数 n 称为 X 的**维数**,记为 $\dim X=n$.

当 $X=\{0\}$ 时,记 $\dim X=0$. 若 X 的维数为正整数 n 或 0 时,

则 X 称为是**有限维的**. 若 X 不是有限维的,则 X 称为是**无限维的**,这时记为 $\dim X=\infty$.

定义 1.14 设 X 是线性空间,$B\subset X$. 若集 B 是线性无关的且 $\operatorname{span}B=X$,即对于任意 $x\in X$,存在 $x_1,\cdots,x_n\in B$ 以及 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$,使得

$$x=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n, \tag{1.4}$$

则 B 称为 X 的一个**基**,或称为 Hamel 基.

显然,当 B 是 X 的基时,对于任意非零元素 $x\in X$,必存在唯一的 $x_1,\cdots,x_n\in B$ 以及不全为零的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使得(1.4)成立.

线性空间 X 的基可能包含有限多个元素也可能包含无限多个元素. 当 $\dim X=n$ 时,由定义知,X 的任何一个基包含 n 个元素,并且由 n 个元素组成的线性无关集都是 X 的基.

应该指出,每一个线性空间都存在基.(具体证明略.)

线性空间 $C[a,b]$,$l^p(1\leqslant p<\infty)$都是无限维空间的例子. 下面是关于有限维空间的例子,其结论是明显的.

例 1.15 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 都是 n 维线性空间. 下列元素

$$\begin{aligned} e_1&=(1,0,0,\cdots,0)^T,\\ e_2&=(0,1,0,\cdots,0)^T,\\ &\cdots\cdots\\ e_n&=(0,0,0,\cdots,1)^T \end{aligned} \tag{1.5}$$

组成线性无关集,故是一个基.

例 1.16 $P_n[0,1]$表示闭区间$[0,1]$上次数小于或等于 n 的多项式的全体组成的集. 它是线性空间 $C[0,1]$的子空间. $P_n[0,1]$是 $n+1$ 维空间. 取 $x_i\in P_n[0,1](i=0,1,\cdots,n)$满足

$$x_i(t)=t^i\qquad(t\in[0,1]),$$

则集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是 $P_n[0,1]$的基.

例 1.17 $\mathbb{R}^{n\times n}$和$\mathbb{C}^{n\times n}$都是 n^2 维线性空间. 用 A_{ij}表示第 i 行第 j 列元素为 1 其余元素全为零的 $n\times n$ 方阵,则

$$\{A_{ij} \mid i,j=1,2,\cdots,n\}$$

是$\mathbb{R}^{n\times n}$和$\mathbb{C}^{n\times n}$的基.

四、线性算子

定义 1.15 设 X 和 Y 是在同一数域$\mathbb{K}$上的两个线性空间($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或$\mathbb{K}=\mathbb{C}$),T 是 X 到 Y 的映射.若对于任意 $x,y\in X$ 和 $\alpha\in\mathbb{K}$ 有

$$T(x+y)=Tx+Ty,$$
$$T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

则 T 称为线性空间 X 到线性空间 Y 的**线性算子**,或称为线性变换.特别地,当 $Y=\mathbb{K}$ 时,T 称为**线性泛函**.

显然,$T:X\to Y$ 是线性算子当且仅当对任意 $x,y\in X$ 以及 α,$\beta\in\mathbb{K}$ 有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$$

例 1.18 定义积分算子 $T:C[0,1]\to C[0,1]$,使对任意 $x\in C[0,1]$,

$$(Tx)(t)=\int_0^t x(t)\mathrm{d}t,$$

则 T 是线性算子.

例 1.19 有限维线性空间到有限维线性空间的线性算子.

设 X 和 Y 是同一数域$\mathbb{K}$上的线性空间,$\dim X=n$,$\dim Y=m$.设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是 X 的基,$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$是 Y 的基,且 E 和 B 中的元素保持固定的次序.

若 $T:X\to Y$ 是任意一个线性算子,对于每一个 $x\in X$,在基 E 下 x 可表示为

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n,$$

则 x 的象为

$$y=Tx=T\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_ke_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\xi_kTe_k. \tag{1.6}$$

可见线性算子 T 完全由 $Te_1,\cdots,Te_n$ 唯一确定. 设 y 及每一个 Te_k 在基 B 下分别表示为

$$y = \sum_{j=1}^{m}\eta_j b_j,$$

$$Te_k = \sum_{j=1}^{m}t_{jk}b_j \qquad (k = 1,\cdots,n).$$

把上面二式代入(1.6)式,得到

$$\sum_{j=1}^{m}\eta_j b_j = y = \sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k = \sum_{k=1}^{n}\xi_k\sum_{j=1}^{m}t_{jk}b_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}t_{jk}\xi_k\right)b_j.$$

因为$\{b_1,\cdots,b_m\}$线性无关,所以等式两端各个 b_j 的系数相等,即

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n}t_{jk}\xi_k, \quad (j = 1,\cdots,m). \qquad (1.7)$$

这表明,在映射 T 下,$x = \sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$ 的象 $y = Tx = \sum_{j=1}^{m}\eta_j b_j$ 由(1.7)式确定.

把(1.7)式写成矩阵运算的形式

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{m1} & \cdots & t_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}. \qquad (1.8)$$

记

$$A = \begin{bmatrix}t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{m1} & \cdots & t_{mn}\end{bmatrix} = [t_{ij}]_{m\times n},$$

则 n 维线性空间 X 到 m 维线性空间 Y 的线性算子 T 对应于一个(关于 X 和 Y 的选定的基的)矩阵 A. A 的第 j 列正是 Te_j 在基$\{B_1,\cdots,B_n\}$下的坐标.

反过来,每一个 m 行 n 列矩阵 $A=[t_{ij}]_{m\times n}$可决定一个 X 到 Y

的线性算子 T，使得对每一个 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in X$，由(1.8)(或(1.7))得到 $\eta_1,\cdots,\eta_m$，从而得到 x 的象

$$y=Tx=\sum_{j=1}^{m}\eta_j b_j.$$

当 $X=Y=\mathbb{C}^n$ 时，设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的基，则每一个 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性变换 T(在线性代数中，常称线性算子为线性变换)与一个 $n\times n$ 方阵 $A=[t_{ij}]_{n\times n}$ 是一一对应的，即对任意 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，

$$y=Tx=\sum_{j=1}^{n}\eta_j b_j, \tag{1.9}$$

或者写成矩阵运算的形式

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{n1} & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

五、线性算子的零空间

定义 1.16 设 X 和 Y 是线性空间，$T: X\to Y$ 是线性算子. 记

$$\mathcal{N}(T)=\{x\in X\mid Tx=0\}.$$

$\mathcal{N}(T)$ 称为算子 T 的**零空间**，或称为算子 T 的核.

显然，T 的零空间 $\mathcal{N}(T)$ 是 X 的线性子空间.

例 1.20 方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 的一个给定的基下，由例 1.19 知，可看作为一个 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性算子，即任一元素 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{C}^n$ 的象

$$Ax=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n.$$

于是线性算子 A 的零空间就是 $Ax=0$ 的解集

$$\{x\in\mathbb{C}^n\mid Ax=0\}.$$

它是 $\mathbb{C}^n$ 的线性子空间.

六、线性同构

定义 1.17 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间，$T: X\to Y$ 是一个映射.

(1) 若 T 是双射，又是线性算子，则 T 称为是 X 到 Y 上的**线性同构映射**.

(2) 若存在一个 X 到 Y 上的线性同构映射，则 X 和 Y 称为是**线性同构的**.

定义中，两个同构的线性空间的"同构"二字意味着两个空间的元素一一对应且两个空间的代数结构(即线性运算)可以看作为相同的.

显然，每一个 n 维实(或复)的线性空间都和 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$)线性同构. 例如，当 X 是 n 维实线性空间时，设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的基，则 X 中的每一个元素 x 在此基下有唯一的表示，即 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，定义映射 $T: X\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$Tx=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T,$$

则 T 是 X 到 $\mathbb{R}^n$ 上的线性同构映射.

不难证明下面一个更为一般的结论.

定理 1.6 在同一数域上的两个有限维线性空间是线性同构的，当且仅当它们具有相同的维数.

§1.3 内积空间

本节研究内积空间及其性质，包括由内积导出的元素的范数和二元素的正交的性质. 简单地讲，内积空间是一个赋予内积结构的线性空间.

在二维线性空间 $\mathbb{R}^2$ 中，每一个点 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 对应于一个以原点为起点以 (ξ_1,ξ_2) 为终点的向量 $(\xi_1,\xi_2)^T$，因此在 $\mathbb{R}^2$ 中的点 x 也

可看作为向量 x. $\mathbb{R}^2$ 中二向量 $x=(\xi_1,\xi_2)^T$ 和 $y=(\eta_1,\eta_2)^T$ 的点积定义为

$$x\cdot y=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2,$$

其等价于

$$x\cdot y=|x||y|\cos\alpha,$$

这里 $|x|$ 和 $|y|$ 分别表示向量 x 和 y 的长度，α 表示二向量 x 和 y 之间的夹角. 应用点积的定义，任一向量 x 的长度 $|x|$ 可以表示为

$$|x|=\sqrt{x\cdot x}\ ;$$

同时，任意二非零向量 x 与 y 之间的夹角 α 可由下式确定

$$\cos\alpha=\frac{x\cdot y}{|x||y|}\ .$$

因此，二向量 x 与 y 垂直（或称为正交）的充分必要条件是点积 $x\cdot y=0$. 二向量的点积也称为二向量的内积. 定义了点积的线性空间 $\mathbb{R}^2$ 称为二维欧氏空间. 它可作为下面更一般的内积空间的具体模型

一、内积空间的定义及内积的性质

定义 1.18 设 X 是数域 $\mathbb{K}$（$\mathbb{K}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$）上的线性空间. 若映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to\mathbb{K}$（即任意 $(x,y)\in X\times X$ 的象 $\langle x,y\rangle\in\mathbb{K}$）对于任意 $x,y,z\in X$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ 满足下列条件：

(1) 对第一变元的线性性

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle,$$

(2) 共轭对称性 $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$,

(3) 正定性 $\langle x,x\rangle\geqslant 0$，并且 $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$，

则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 称为 X 上的**内积**，$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称为**内积空间**，通常简记为 X. 对于 $x,y\in X$，$\langle x,y\rangle$ 称为 x 与 y 的内积.

当 $\mathbb{K}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 时，内积空间 X 称为复内积空间.（为了使所讨论的问题具有一般性，在没有事先声明的情况下，我们总是假定所讨论的空间是复内积空间.）当 $\mathbb{K}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 时，内积空间 X 称

为实内积空间. 这时，上述定义中的条件(2)变为$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$，即实内积空间中内积具有对称性.

由内积的定义，立即可得到下面的性质.

(1) 内积对第二个变元是共轭线性的，即对任意 $x,y,z\in X$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，有

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\bar{\beta}\langle x,y\rangle.$$

(2) 若 $x=0$ 或 $y=0$，则$\langle x,y\rangle=0$.

引理 1.3　内积空间 X 中的任意二元素 x 和 y 都满足下面的 Schwarz 不等式

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle x,x\rangle}\ \sqrt{\langle y,y\rangle}. \tag{1.11}$$

证明　当 $y=0$ 时，不等式(1.11)显然成立. 现设 $y\neq 0$，对于任意的数 α，由内积的正定性

$$\begin{aligned}0&\leqslant\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle\\&=\langle x,x\rangle-\bar{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha\langle y,x\rangle+\alpha\bar{\alpha}\langle y,y\rangle\\&=\langle x,x\rangle-\bar{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha[\langle y,x\rangle-\bar{\alpha}\langle y,y\rangle].\end{aligned}$$

只要令 $\bar{\alpha}=\dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$，可使上式中方括号内的表达式为零，并且上面的不等式化为

$$0\leqslant\langle x,x\rangle-\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle=\langle x,x\rangle-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}.$$

由此式立即得到不等式(1.11).　　证毕.

定义 1.19　设 X 是内积空间，$x\in X$. 记

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle},$$

$\|x\|$ 称为 X 上**由内积导出的范数**.

易知，X 上由内积导出的范数，对于任意 $x,y\in X$ 及 $\alpha\in\mathbb{K}$，满足以下条件：

(1) $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$，

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$，

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

下面仅证明(3). 由于

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle,\end{aligned}$$

式中 $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$ 表示 $\langle x,y\rangle$ 的实部. 由 Schwarz 不等式

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle\leqslant|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

因此

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

两端开平方,得到 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

内积空间 X 中向量 x 的范数 $\|x\|$ 在直观上可理解为向量 x 的"度量". 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中,两个向量 x 和 y 的内积定义为此二向量的点积,即 $\langle x,y\rangle=x\cdot y$. 因此 $\mathbb{R}^2$ 上由内积导出的范数 $\|x\|$ 就是向量 x 的长度 $|x|$.

内积空间上由内积导出的范数具有如下性质.

引理 1.4 设 X 是内积空间. 对任意 $x,y\in X$,由内积导出的范数满足下列各恒等式:

(1) 平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \quad (1.12)$$

(2) 极化恒等式,即当 X 是实内积空间时

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2); \quad (1.13)$$

当 X 是复内积空间时

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2). \quad (1.14)$$

证明 恒等式(1.12),(1.13),(1.14)可经直接计算验证. 例如

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle$$
$$=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle$$
$$=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

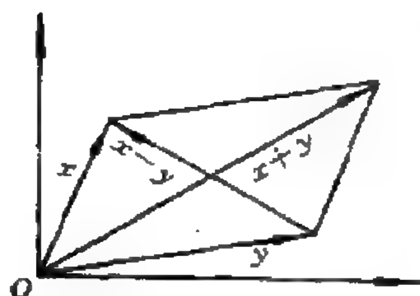

图 1-1

从图 1-1 中可以看出，恒等式(1.12)是平面几何中"平行四边形四条边长的平方和等于两条对角线的平方和"这一平行四边形公式在内积空间中的推广，因此也称为平行四边形公式.

二、内积空间的例子

例 1.21 在线性空间$\mathbb{C}^n$ 和$\mathbb{R}^n$ 上，对于任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T\in\mathbb{C}^n$，定义

$$\langle x,y\rangle=\xi_1\bar{\eta}_1+\cdots+\xi_n\bar{\eta}_n, \tag{1.15}$$

则不难验证$\mathbb{C}^n$ 按照(1.15)定义的内积成为复内积空间.

对于任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T, y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T\in\mathbb{R}^n$，定义

$$\langle x,y\rangle=\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n, \tag{1.16}$$

则同样可验证$\mathbb{R}^n$ 按照(1.16)定义的内积成为实内积空间.

由(1.15)或(1.16)定义的内积可导出$\mathbb{C}^n$(或$\mathbb{R}^n$)中的任一元素 x 的范数为

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\Big(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

例 1.22 在线性空间 l^2 上，对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots), y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$，定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^\infty\xi_i\bar{\eta}_i, \tag{1.17}$$

则 l^2 按(1.17)定义的内积成为内积空间. 对于 l^2 中的元素 x，由内积导出的范数为

$$\|x\|=\Big(\sum_{i=1}^\infty|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

例 1.23 在线性空间 $C[a,b]$ 上，对于任意 $x,y\in C[a,b]$，定义

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \tag{1.18}$$

则 $C[a,b]$ 按(1.18)定义的内积成为内积空间. 对于 $C[a,b]$ 中的元素 x，由内积导出的范数为

$$\|x\|=\left(\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

三、正交

与熟知的欧氏空间(如 $\mathbb{R}^2$)一样，可以在一般的内积空间中定义两个元素正交的概念，并且将欧氏空间中关于正交的一些几何特征类似地在内积空间中建立.

定义 1.20 设 X 是内积空间，$x,y\in X$ 及 $A,B\subset X$.

(1) 若 $\langle x,y\rangle=0$，则 x 与 y 称为是**正交**的(或直交的)，记为 $x\perp y$.

(2) 若对于每一个 $a\in A$ 和每一个 $b\in B$ 都有 $a\perp b$，则 A 与 B 称为是正交的(或直交的)，记为 $A\perp B$. 特别地，$\{x\}\perp B$ 记为 $x\perp B$.

(3) 令

$$A^\perp=\{x\in X\,|\,x\perp A\},$$

$A^\perp$ 称为 A 的**正交补**(或直交补).

由定义，显然零元素与 X 中任何元素正交. 关于正交，常用到下面的性质.

引理 1.5 设 X 是内积空间，$x,y\in X$，$A\subset X$.

(1) 若 $x\perp y$，则 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$(勾股定理).

(2) $A\cap A^\perp\subset\{0\}$，即 $A\cap A^\perp$ 至多包含零元素；若 $0\in A$(例如 A 是 X 的子空间)，则 $A\cap A^\perp=\{0\}$.

证明 (1) 若 $x\perp y$，则 $\langle x,y\rangle=0$，从而 $\langle y,x\rangle=0$. 于是

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.
\end{aligned}
$$

(2) 若 $x\in A\cap A^{\perp}$，则 $x\perp x$，即 $\langle x,x\rangle=0$，故 $x=0$. 因此 $A\cap A^{\perp}\subset\{0\}$. 若 $0\in A$（当 A 是 X 的子空间时，必有 $0\in A$），显然又有 $0\in A^{\perp}$，故 $A\cap A^{\perp}=\{0\}$.

四、内积空间的子空间与同构

定义 1.21 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，Y 是 X 的线性子空间. 对于任意 $x,y\in Y$，在 Y 中定义 x 与 y 的内积为 x 与 y 作为 X 中的元素的内积 $\langle x,y\rangle$，则 Y 本身成为一个内积空间. 此内积空间 Y 称为内积空间 X 的子空间.

由此定义，内积空间 X 的任意一个线性子空间，按照 X 中定义的内积，皆可成为内积空间 X 的子空间.

两个内积空间的同构有如下定义.

定义 1.22 设 X 和 Y 是两个在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间，$T: X\to Y$ 是一个映射. 若 T 是双射且对于任意 $x,y\in X$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ 满足

(1) T 是线性算子，即 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$，

(2) T 保持内积，即 $\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle$，

则 T 称为 X 到 Y 上的**同构映射**.

若存在一个 X 到 Y 上的同构映射，则 X 和 Y 称为是**同构**的.

由此定义，两个同构的内积空间可认为具有相同的线性结构和内积. 因此在同构的意义下，可以把两个同构的内积空间看作是同一的.

§1.4 内积空间中的正交系

作为内积空间的模型，考察 $\mathbb{R}^3$. 取 $\mathbb{R}^3$ 中的元素 $e_1=(1,0,0)^T$，

$e_2=(0,1,0)^T, e_3=(0,0,1)^T$. 容易看出，集$\{e_1,e_2,e_3\}$中的元素是两两正交的，每一个 $x\in\mathbb{R}^3$ 有唯一的表示式

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3.$$

数组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$称为 x 的坐标，$\mathbb{R}^3$ 的每一个元素 x 的坐标可以由内积确定，即

$$\begin{aligned}\langle x,e_j\rangle &=\langle \sum_{i=1}^{3}\alpha_ie_i,e_j\rangle\\ &=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\langle e_i,e_j\rangle=\alpha_j\quad (j=1,2,3).\end{aligned}$$

由此，很自然地在内积空间中给出如下的定义.

定义 1.23 设 X 是内积空间，$0\notin M\subset X$.

(1) 若 M 中的元素是两两正交的，则 M 称为 X 中的一个**正交系**.

(2) 若 M 是 X 中的正交系并且 M 中每一个元素的范数都是 1，即

$$\langle x,y\rangle=\begin{cases}0 & 当\ x\neq y\\ 1 & 当\ x=y\end{cases},$$

则 M 称为 X 中的一个**标准正交系**(或规范正交系).

当正交系(标准正交系)M 是可数集时，有时 M 也称为**正交序列**(标准正交序列).

关于内积空间 X 中的正交系和标准正交系具有如下性质.

(1) 若$\{x_1,\cdots,x_n\}$是 X 中的正交系，则

$$\|x_1+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

事实上，由于当 $i\neq j$ 时$\langle x_i,x_j\rangle=0$，故

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^2 &=\langle\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{j=1}^{n}x_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x_i,x_j\rangle\\ &=\sum_{i=1}^{n}\langle x_i,x_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.\end{aligned}$$

(2) X 中任何正交系 M 都是线性无关的.

事实上,取任意有限集 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset M$. 若

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=0,$$

则对每一个 $j=1,2,\cdots,n$ 都有

$$0=\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i,x_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle x_i,x_j\rangle$$
$$=\alpha_j\langle x_j,x_j\rangle=\alpha_j\|x_j\|^2.$$

而 $\|x_j\|\neq0$, 必有 $\alpha_j=0(j=1,2,\cdots,n)$, 这表明 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是线性无关的. 因此 M 是线性无关的.

(3) 若 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 中的标准正交系, 则 $\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$ 中的每一个元素 x 都可唯一地表示为

$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i.$$

事实上, 由于 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是线性无关的, $\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$ 中的每一个元素 x 都可唯一地表示为.

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$$

的形式, 故对每一个 $j=1,2,\cdots,n$,

$$\langle x,e_j\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,e_j\rangle$$
$$=\alpha_j\langle e_j,e_j\rangle=\alpha_j.$$

(4) 对于 X 中任何线性无关的序列 $\{x_i\}$, 可以应用 Gram-Schmidt 标准正交化方法得到一个标准正交序列 $\{e_i\}$, 使得对每一个 $n\in\mathbb{N}$ 皆有

$$\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}.\tag{1.19}$$

具体做法如下: 令

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

x_2 可以表示为 $x_2=\langle x_2,e_1\rangle e_1+v_2$, 这里 $v_2=x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$. 由于

x_1, x_2 线性无关，则 $v_2 \neq 0$，并且易知 $\langle v_2, e_1 \rangle = 0$，即 $v_2 \perp e_1$. 令

$$e_2 = \frac{v_2}{\| v_2 \|}.$$

同样，记 $v_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2$，则 $v_3 \neq 0$，并且 $v_3 \perp e_1, v_3 \perp e_2$. 令

$$e_3 = \frac{v_3}{\| v_3 \|}.$$

依此方法继续下去，可以得到一个标准正交序列 $\{e_i\}$：

$$e_i = \frac{v_i}{\| v_i \|}, \text{其中 } v_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, e_j \rangle e_j.$$

显然，对每一个 $n \in N$，(1.19)成立.

例 1.24 在内积空间 C^n 和 R^n（内积的定义见例 1.21）中，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是一个标准正交系，其中

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)^T,$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)^T,$$
$$\cdots\cdots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)^T.$$

例 1.25 在内积空间 l^2（内积的定义见例 1.22）中，$\{e_1, e_2, \cdots\}$ 是一个标准正交系，其中

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \cdots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, 0, \cdots),$$
$$e_3 = (0, 0, 1, 0, \cdots),$$
$$\cdots\cdots.$$

例 1.26 在实线性空间 $C[0, 2\pi]$ 中，对于任意两个元素 $x, y \in C[0, 2\pi]$，定义

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) y(t) \mathrm{d}t,$$

则 $C[0, 2\pi]$ 成为实内积空间. 令

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$u_n(t) = \cos nt \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$v_n(t) = \sin nt \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

易验证$\{u_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n, \cdots\}$是一个标准正交系.

习 题 一

1. 证明数直线上的开区间$(-2,2)$和闭区间$[-2,2]$可分别表示为

$$(-2,2) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right],$$

$$[-2,2] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right).$$

2. 对于映射 $f: A \to B$,及任意的 $E \subset A, F \subset B$,证明

$$E \subset f^{-1}(f(E)),$$

$$f(f^{-1}(F)) \subset F,$$

$$f^{-1}(F^C) = (f^{-1}(F))^C.$$

3. 对于映射 $f: A \to B$,及任意的 $A_1, A_2 \subset A$,证明

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

4. 证明$\mathbb{R}^n$ 中的有理点的全体组成一个可数集.
5. 证明所有系数为有理数的多项式的全体组成一个可数集.
6. 证明线性空间 X 的任意多个子空间的交仍然是 X 的子空间. 但是 X 的两个子空间的并不一定是 X 的子空间,试举例说明.
7. 设 M 是线性空间 X 的子集. 证明 $\mathrm{span}M$ 是包含 M 的最小子空间.
8. 在线性空间$\mathbb{R}^3$ 上定义线性算子 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,使得对任意 $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$$Tx = (\xi_1, \xi_2, -\xi_1-\xi_2)^T,$$

求 T 的值域 $\mathscr{R}(T)$,零空间 $\mathscr{N}(T)$以及 T 对应的矩阵.

9. 设 X 是实内积空间,对任意 $x, y \in X$,验证极化恒等式

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

成立.

10. 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$,定义

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i,$$

验证按此定义的$\langle\cdot,\cdot\rangle$是 l^2 上的内积,从而 l^2 成为内积空间.

11. 设 u 和 v 是内积空间 X 中的二元素,若对于每一个 $x\in X$ 皆有

$$\langle x,u\rangle = \langle x,v\rangle,$$

证明 $u=v$. 特别地,若对于每一个 $x\in X$ 皆有$\langle x,u\rangle=0$,则$u=0$.

12. 设 A 和 B 是内积空间 X 的子集,证明:

(1) 若 $A\subset B$,则 $B^\perp\subset A^\perp$;

(2) $A\subset(A^\perp)^\perp$.

13. 证明:任何 n 维实内积空间都与R^n 同构;任何 n 维复内积空间都与C^n 同构.

第二章　矩阵的相似标准形

矩阵的相似标准形有着广泛的应用. 在线性代数中,已讨论了可对角化方阵的相似标准形——对角形矩阵. 但并不是所有方阵都可对角化,本章将从任意方阵的特征矩阵入手,介绍矩阵相似的判别法和两种常用的相似标准形,并进一步讨论方阵可对角化的条件. 最后给出一类特殊矩阵的对角化方法.

§2.1　特征矩阵及其 Smith 标准形

一、方阵的特征矩阵

设 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$,$\lambda\in C$. 含参数 λ 的 n 阶方阵

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$

称为 n 阶方阵 A 的**特征矩阵**. 其行列式

$$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_i\lambda^{n-i}+\cdots+a_n,$$

其中 $a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-\mathrm{tr}A$, $a_n=(-1)^n\det A$,a_i 是 $(-1)^i$与 A 的所有 i 阶主子式之和的乘积. 这个最高次项系数为 1 (简称为首 1)的 n 次多项式称为 A 的**特征多项式**. $f(\lambda)$的零点称为 A 的**特征值**,$f(\lambda)$的 k 重零点就叫做 A 的 k 重特征值. A 的全

部特征值的集合$\sigma(A)$称为A的谱. 设λ是A的一个特征值，若非零向量$x\in\mathbb{C}^n$满足

$$\lambda x=Ax,$$

则称x是A的对应于λ的**特征向量**，有时简称为A的特征向量.

关于特征值和特征向量有下述结论：

(1) $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$有$n$个特征值$\lambda_i\in\mathbb{C}, i=1,2,\cdots,n$，($k$重特征值以$k$个计). 注意，即使$A$是实矩阵，其特征值也可能是复数.

(2) $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的$n$个特征值之和等于$A$的迹，即$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\mathrm{tr}A$；而$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det A$.

(3) A的对应于不同特征值的特征向量是线性无关的.

(4) 若λ是A的特征值，则λ^m是$A^m(m\in\mathbb{N})$的特征值；又若x是A的对应于λ的特征向量，则x也是A^m的对应于λ^m的特征向量.

(5) 若A可逆，λ_0是A的特征值，则$\frac{1}{\lambda_0}$是A^{-1}的特征值.

A的特征矩阵$\lambda E-A$的元素是λ的一次函数或常数. 一般地，以函数为元素的矩阵叫做函数矩阵. 特别地，以关于λ的多项式为元素的矩阵叫做**多项式矩阵**或λ-矩阵，通常记为$A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $\cdots$等等. 今后用$\mathbb{R}[\lambda]^{m\times n}$和$\mathbb{C}[\lambda]^{m\times n}$分别表示全体$m\times n$阶的元素是实系数和复系数多项式的矩阵的集合，当不必区分是实的或复的多项式矩阵时，也可以记为$\mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$. 相应地，以常数为元素的矩阵叫做数字矩阵或常数矩阵，当然它也可视为特殊的多项式矩阵. 多项式矩阵的行列式、子式、伴随矩阵、分块等概念以及加法、数乘、乘法及其运算法则，都与数字矩阵相同，不再赘述. 多项式矩阵也有秩、可逆、初等变换等概念，但与数字矩阵不尽相同.

定义 2.1 设有$A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$，若$A(\lambda)$中有一个$r$ ($1\leqslant r\leqslant\min\{m,n\}$)阶子式是非零多项式（即不恒为零），而一切

$r+1$阶子式(如果有的话)都是零多项式(即 0),则称 $A(\lambda)$的**秩**为 r,记为 $\operatorname{rank}A(\lambda)=r$,规定零矩阵的秩为零,即 $\operatorname{rank}0=0$.

由定义 2.1 知 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的秩为 n.

定义 2.2 若 $A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$ 且 $\det A(\lambda)$ 不恒为零,即 $\operatorname{rank}A(\lambda)=n$,则称 $A(\lambda)$是**满秩的**或**非奇异的**.

由定义 2.2 知任意方阵的特征矩阵都是满秩的.

定义 2.3 设 $A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$,若存在 $B(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$,使得

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E,$$

则称 $A(\lambda)$是**可逆的**或**单模态的**,$B(\lambda)$称为 $A(\lambda)$的逆矩阵. 可逆的多项式矩阵的逆矩阵是唯一的. $A(\lambda)$的逆矩阵记为 $A^{-1}(\lambda)$.

应当注意,对于多项式矩阵来说,非奇异与可逆并不等价,而是有下述关系.

定理 2.1 (1) 若 $A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$可逆,则 $A(\lambda)$非奇异;反之不真.

(2) $A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$可逆的充分必要条件是 $\det A(\lambda)$等于非零的常数 c.

证明 (1) 若 $A(\lambda)$可逆,则

$$A(\lambda)A^{-1}(\lambda)=E,$$

于是有

$$\det A(\lambda)\cdot\det A^{-1}(\lambda)=\det[A(\lambda)A^{-1}(\lambda)]=\det E=1,$$

所以 $\det A(\lambda)$是非零的常数,从而 $A(\lambda)$是非奇异的.

反之不真,例如 $A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$,$\det A(\lambda)=\lambda^2$ 是非零多项式,不是非零常数,故它是非奇异的,但不是可逆的.

(2) 必要性已在(1)中证明了,现证充分性. 设 $\det A(\lambda)=c\neq 0$;$A(\lambda)$的伴随矩阵为 $\operatorname{adj}A(\lambda)$,则

$$A(\lambda)\,\frac{1}{c}\operatorname{adj}A(\lambda)=\frac{1}{c}\operatorname{adj}A(\lambda)\cdot A(\lambda)=E,$$

故 $A(\lambda)$可逆且 $A^{-1}(\lambda)=\frac{1}{c}\mathrm{adj}A(\lambda)$. 证毕.

二、特征矩阵的 Smith 标准形

同研究数字矩阵一样,"初等变换"也是研究多项式矩阵的有效方法.

对多项式矩阵 $A(\lambda)$施行的下述变换称为初等行(或列)变换:

(1) 互换 $A(\lambda)$的第 i,j 两行(或第 i,j 两列),记为

$$A(\lambda)\xrightarrow{[i,j]}B(\lambda)\quad(\text{或 }A(\lambda)\xrightarrow[{[i,j]}]{}B(\lambda)).$$

(2) $A(\lambda)$的第 i 行(或第 i 列)乘以非零常数 a,记为

$$A(\lambda)\xrightarrow{[i(a)]}B(\lambda)\quad(\text{或 }A(\lambda)\xrightarrow[{[i(a)]}]{}B(\lambda)).$$

(3) $A(\lambda)$的第 j 行(或第 j 列)乘以多项式 $\varphi(\lambda)$后再加到第 i 行(或 i 列)上去,记为

$$A(\lambda)\xrightarrow{[i+j\cdot\varphi(\lambda)]}B(\lambda)\quad(\text{或 }A(\lambda)\xrightarrow[{[i+j\cdot\varphi(\lambda)]}]{}B(\lambda)).$$

同样地,对多项式矩阵施行一次初等行(或列)变换,相当于左乘(或右乘)一个相应的初等矩阵.因为初等矩阵都是可逆的,因此施行有限次初等行(或列)变换的结果,就相当于左乘(或右乘)一个单模态矩阵.

定义 2.4 设有 $A(\lambda),B(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$,若 $A(\lambda)$可经过有限次初等变换化为 $B(\lambda)$,即存在单模态矩阵 $P(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{m\times m}$和 $Q(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$,使得

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

则称 $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$等价,记为 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$.

同数字矩阵一样,可以证明,初等变换不改变多项式矩阵的秩,故有

定理 2.2 若 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$,则 $\mathrm{rank}A(\lambda)=\mathrm{rank}B(\lambda)$.

不难验证,多项式矩阵的等价关系"$\simeq$"具有

(1) 自反性　$A(\lambda)\simeq A(\lambda)$；

(2) 对称性　若 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$，则 $B(\lambda)\simeq A(\lambda)$；

(3) 传递性　若 $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$，$B(\lambda)\simeq C(\lambda)$，则 $A(\lambda)\simeq C(\lambda)$.

一般地，凡具有上述三条性质的"关系"统称为等价关系. 例如，数的相等关系、三角形的相似关系等都是等价关系.

$\mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$的全体元素可按关系"$\simeq$"分成若干个等价类. 每一类中任意两个多项式矩阵都等价，不同类的矩阵不等价. 彼此等价的多项式矩阵有许多共同的性质(例如它们的秩相同)，因此在涉及这些共同性质时，只需就该等价类中形式最简单的代表元进行讨论，这个代表元通常称为标准形或法式.

定义 2.5　若 n 阶对角形矩阵

$$S(\lambda)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

中，每一个不为零的 $d_i(\lambda)$ 都是首 1 多项式，且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$①，$i=1,2,\cdots,n-1$，则称 $S(\lambda)$ 是一个 **Smith 标准形**或法对角形.

由定义可知，若 $S(\lambda)$ 是一个 Smith 标准形，则当 $d_i(\lambda)=1$ 且 $i>1$时，有 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{i-1}(\lambda)=1$，而当 $d_k(\lambda)=0$ 且 $k<n$ 时，有 $d_{k+1}(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=0$.

定理 2.3　任意 $A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{n\times n}$都与一个 Smith 标准形$S(\lambda)$等价，并称这个 $S(\lambda)$ 为 **$A(\lambda)$的 Smith 标准形**.

证明　若 $A(\lambda)$是零矩阵，则 $A(\lambda)$本身就是一个 Smith 标准形. 现证 $A(\lambda)$是非零矩阵的情况.

在所有与 $A(\lambda)$等价的多项式矩阵中，必存在(1,1)位置元素

---

① 记号 $p(\lambda)\mid q(\lambda)$表示多项式 $p(\lambda)$能整除多项式 $q(\lambda)$，类似地 $p(\lambda)\nmid q(\lambda)$表示 $p(\lambda)$不能整除 $q(\lambda)$.

的次数最低者，将其记为

$$G(\lambda)=[g_{ij}(\lambda)]\in K[\lambda]^{n\times n},$$

即 $G(\lambda)\simeq A(\lambda)$且对任意的 $B(\lambda)=[b_{ij}(\lambda)]\simeq A(\lambda)$，恒有

$$\deg g_{11}(\lambda)\leqslant \deg b_{11}(\lambda)\quad (\text{当 } b_{11}\neq 0 \text{ 时}). \tag{1}$$

于是必有 $g_{11}(\lambda)|g_{1j}(\lambda), g_{11}(\lambda)|g_{i1}(\lambda),\ i,j=2,3,\cdots,n$. 事实上，若 $g_{11}(\lambda)\nmid g_{1j}(\lambda)$，则应有

$$g_{1j}(\lambda)=g_{11}(\lambda)q_{1j}(\lambda)+r_{1j}(\lambda),$$

其中 $r_{1j}(\lambda)$是非零多项式，且 $\deg r_{1j}(\lambda)<\deg g_{11}(\lambda)$. 作初等变换

$$G(\lambda)\xrightarrow[{[j-1\cdot q_{1j}(\lambda)]}]{}G_1(\lambda)\xrightarrow[{[1,j]}]{}G_2(\lambda).$$

因为 $G_1(\lambda)$的$(1,j)$位置的元素为 $r_{1j}(\lambda)$，故 $G_2(\lambda)$的$(1,1)$位置的元素为 $r_{1j}(\lambda)$，于是有 $G_2(\lambda)\simeq G(\lambda)\simeq A(\lambda)$，但 $\deg g_{11}(\lambda)>\deg r_{1j}(\lambda)$，这与(1)式矛盾，所以 $g_{11}(\lambda)|g_{1j}(\lambda)$. 同理可证$g_{11}(\lambda)|g_{i1}(\lambda)$. 故$G(\lambda)$可通过初等变换化为

$$H(\lambda)=\begin{bmatrix} g_{11}(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{22}(\lambda) & h_{23}(\lambda) & \cdots & h_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & h_{n2}(\lambda) & h_{n3}(\lambda) & \cdots & h_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

且可以证明 $g_{11}(\lambda)|h_{ij}(\lambda), i,j=2,\cdots,n$. 如若不然，必有某个 $h_{ij}(\lambda)$不能被 $g_{11}(\lambda)$整除，则

$$h_{ij}(\lambda)=g_{11}(\lambda)q_{ij}(\lambda)+r_{ij}(\lambda),$$

其中 $r_{ij}(\lambda)$是非零多项式，且 $\deg r_{ij}(\lambda)<\deg g_{11}(\lambda)$. 作初等变换

$$H(\lambda)\xrightarrow{[1+i]}\widetilde{H}_1(\lambda)\xrightarrow[{[j-1\cdot q_{ij}(\lambda)]}]{}\widetilde{H}_2(\lambda)\xrightarrow[{[1,j]}]{[1,i]}\widetilde{H}_3(\lambda),$$

$\widetilde{H}_3(\lambda)$的$(1,1)$位置的元素为 $r_{ij}(\lambda)$. 由此得 $\widetilde{H}_3(\lambda)\simeq A(\lambda)$但 $\deg g_{11}(\lambda)>\deg r_{ij}(\lambda)$，这也与(1)式矛盾. 令

$$H_1(\lambda)=\begin{bmatrix} h_{22}(\lambda) & \cdots & h_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n2}(\lambda) & \cdots & h_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

当 $H_1(\lambda)$不是零矩阵时，对 $H_1(\lambda)$使用上述方法得

$$H_1(\lambda) \simeq \Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} \varphi_{22}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{33}(\lambda) & \cdots & \varphi_{3n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \varphi_{n3}(\lambda) & \cdots & \varphi_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

且 $\varphi_{22}(\lambda)|\varphi_{ij}(\lambda),\ i,j=3,4,\cdots,n$.

因为 $H_1(\lambda)\simeq\Phi(\lambda)$且 $g_{11}(\lambda)|h_{ij}(\lambda)$，故 $g_{11}(\lambda)$也能除尽 $\Phi(\lambda)$的所有元素. 至此我们得到

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} g_{11}(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{33}(\lambda) & \cdots & \varphi_{3n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \varphi_{n3}(\lambda) & \cdots & \varphi_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

且 $g_{11}(\lambda)|\varphi_{22}(\lambda),\ \varphi_{22}(\lambda)|\varphi_{ij}(\lambda),\ i,j=3,4,\cdots,n$.

继续以上作法，经过 $n-1$ 次之后得

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{bmatrix},$$

其中 $f_i(\lambda)|f_{i+1}(\lambda),\ i=1,2,\cdots,n-1$.

最后，当 $f_i(\lambda)$为非零多项式时，以 $f_i(\lambda)$的首项系数去除第 i 行即得 $A(\lambda)$的 Smith 标准形. 证毕.

定理 2.4 对任意 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，其特征矩阵 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形 $S(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda))$中，所有 $d_i(\lambda)$都是非零多项式. 称 $d_i(\lambda)$为 $\lambda E-A$ 的**第 i 个不变因子**，$i=1,2,\cdots,n$.

证明 因为 $\mathrm{rank}(\lambda E-A)=n$，由定理 2.2 知 $\mathrm{rank}S(\lambda)=n$. 所以每个 $d_i(\lambda)$都是非零多项式.

定理 2.3 表明，可用初等变换求多项式矩阵的 Smith 标准形.

例 2.1 设 $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$，求 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形和不变因子.

解

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1,2]}\begin{bmatrix}3 & \lambda+5 & 0\\ \lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3+1\cdot(-1)]}\begin{bmatrix}3 & \lambda+5 & 0\\ \lambda-4 & -6 & 0\\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[2+3]}]{[1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)]}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}(\lambda+5) & 0\\ \lambda-4 & -6 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2+1\cdot(-\lambda+4)]}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3}(\lambda+5) & 0\\ 0 & \frac{-1}{3}(\lambda^2+\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[2+1\cdot\left(\frac{\lambda+5}{-3}\right)]}]{[2\cdot(-3)]}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[2,3]}]{[2,3]}\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{bmatrix}.$$

$\lambda E-A$ 的三个不变因子分别是

$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda-1$，$d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$.

对于任意的多项式矩阵 $A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$，也可经有限次初等变换化为 Smith 标准形

$$\begin{bmatrix} S(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

这是一个分块对角形矩阵. 其中左上角的对角矩阵

$$S(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)),$$

$1\leqslant r=\mathrm{rank}A(\lambda)\leqslant \mathrm{mim}\{m,n\}$，$d_i(\lambda)$是首 1 多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,r-1$. 而右下角的零矩阵可能不出现. $d_i(\lambda)$称为 $A(\lambda)$的第 i 个不变因子，$i=1,2,\cdots,r$.

§2.2 特征矩阵的行列式因子与初等因子

一、行列式因子

定义 2.6 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\lambda E-A$ 中一切非零的 k($1\leqslant k\leqslant n$，$k\in\mathbb{N}$)阶子式的首 1 的最高公因式称为 $\lambda E-A$ 的 k **阶行列式因子**，记为 $D_k(\lambda)$.

在例 2.1 中，$\lambda E-A$ 的不为零的全部一阶子式

$$\lambda-4,\ -6,\ 3,\ \lambda+5,\ 6,\ \lambda-1$$

的首 1 最高公因式为 1，故 $D_1(\lambda)=1$. 不为零的全部二阶子式

$$(\lambda-1)(\lambda+5),\ 3(\lambda-1),\ -3(\lambda-1),\ -6(\lambda-1),$$
$$(\lambda-1)(\lambda-4),6(\lambda-1),(\lambda-1)(\lambda+2)$$

的首 1 最高公因式为 $\lambda-1$，故 $D_2(\lambda)=\lambda-1$. 由于三阶子式只有 $\det(\lambda E-A)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，且它是首 1 的，故

$$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

由定义可知，$\lambda E-A$ 的各阶行列式因子 $D_k(\lambda)$($k=1,2,\cdots,n$)是由 $\lambda E-A$(从而由 A)唯一确定的.

定理 2.5 初等变换不改变 $\lambda E-A$ 的各阶行列式因子.

由初等变换定义及行列式的性质可证明此定理，具体证明过程请见[6]，此处从略.

当 n 较大时，按定义求各阶行列式因子相当复杂. 一般说来，当 $n\geqslant 3$ 时，先对 $\lambda E-A$ 施行若干次初等变换后，再求其行列式因子较为方便. 特别地，若已知 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形，则可立即写出它的各阶行列式因子：

$$
\begin{aligned}
&D_1(\lambda)=d_1(\lambda),\ D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda),\cdots,\\
&D_n(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

由(2.1)式可知，$D_i(\lambda)\mid D_{i+1}(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,n-1$. 此外注意到 $D_n(\lambda)=\det(\lambda E-A)$ 是有益的.

若在(2.1)式中解出 $d_i(\lambda)$，便有

$$
d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\ d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots,d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}. \tag{2.2}
$$

由(2.2)式及行列因子的唯一性可知，$\lambda E-A$ 的不变因子也是由 $\lambda E-A$(从而由 A)唯一确定的. 这就证明了 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形的唯一性.

由于 $\lambda E-A$ 的不变因子和行列式因子都是由 A 唯一确定的，故有时将它们简称为 A 的不变因子和行列式因子.

例 2.2 求

$$
A(\lambda)=\begin{bmatrix}
\lambda & & & & & a_n\\
-1 & \lambda & & & & a_{n-1}\\
 & -1 & \lambda & & & a_{n-2}\\
 & & -1 & \ddots & & \vdots\\
 & & & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & & & \ddots\ \ \lambda & a_2\\
 & & & & -1 & \lambda+a_1
\end{bmatrix}
$$

的 Smith 标准形.

解 记 $\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，则

$$\det A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & & & & & a_n \\ -1 & \lambda & & & & a_{n-1} \\ & -1 & \lambda & & & a_{n-2} \\ & & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots \quad \lambda & a_2 \\ & & & & -1 & \lambda+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{[1+i\cdot(\lambda^{i-1})]}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \varphi(\lambda) \\ -1 & \lambda & 0 & & & a_{n-1} \\ & -1 & \lambda & & & a_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \lambda & a_2 \\ & & & & -1 & \lambda+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\varphi(\lambda)\begin{vmatrix} -1 & \lambda & & & \\ & -1 & \lambda & & \\ & & -1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda \\ & & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$=\varphi(\lambda),$$

所以 $D_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

又因为有一个 $n-1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & & & \\ & -1 & \lambda & & \\ & & -1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda \\ & & & & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$$

是不为零的常数，故 $D_{n-1}(\lambda)=1$，于是

$$D_{n-2}(\lambda) = D_{n-3}(\lambda) = \cdots = D_1(\lambda) = 1.$$

因此

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1,$$

$$d_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

$A(\lambda)$的 Smith 标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \end{bmatrix}.$$

对于一般的多项式矩阵 $A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$，只要将 n 改为 $r(=\operatorname{rank}A(\lambda))$，上述关于行列式因子的定义及定理 2.5，公式(2.1)和(2.2)对 $A(\lambda)$仍然是成立的.

二、初等因子

定义 2.7 设 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$是 $\lambda E-A$ 的 n 个不变因子，在$\mathbb{C}$ 上将每个 $d_i(\lambda)$分解成一次因式的方幂之乘积

$$d_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{it}},$$

(其中 $k_{ij} \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,t$，且 $\sum_{j=1}^{t} k_{ij} = \deg d_i(\lambda)$，当 $l\neq j$ 时，$\lambda_l\neq\lambda_j$)。$k_{ij}>0$ 的那些因式$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}$ $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,t)$统称为 $\lambda E-A$ 的**初等因子**，$\lambda E-A$ 的全部初等因子称为 $\lambda E-A$ 的初等因子组(计算初等因子组中初等因子的个数时，重复出现的按出现的次数计).

所有$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}$都称为与 $\lambda-\lambda_j$ 相当的初等因子. 由于 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，故必有

$$k_{1j} \leqslant k_{2j} \leqslant \cdots \leqslant k_{nj}, \quad j=1,2,\cdots,t.$$

例 2.1 中 $\lambda E-A$ 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda-1$，$d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$，于是初等因子组为

$$\lambda-1,\ \lambda-1,\ \lambda+2.$$

类似地可定义一般多项式矩阵 $A(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$的初等因子.

若已知 $A(\lambda)$的初等因子组，则也能很快写出 $A(\lambda)$的不变因子.因为初等因子组是由各个 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$分解而得且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，故与 $\lambda-\lambda_j$ 相当的各初等因子中，方幂最高的必出现在 $d_r(\lambda)$中，次高的必出现在 $d_{r-1}(\lambda)$中，依次类推.这就是说，与 $\lambda-\lambda_j$ 相当的各初等因子出现在第几个不变因子的分解式中，是由 $A(\lambda)$唯一确定的.

例 2.3 设 $A\in C^{4\times4}$，已知 $\lambda E-A$ 的初等因子组为

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda+1,$$

求 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形.

解 $d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)$，$d_3(\lambda)=\lambda$，$d_2(\lambda)=1$，$d_1(\lambda)=1$ 故 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形为

$$S(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda^2(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

综合前述关于多项式矩阵的讨论，可以得出下面的结果.

定理 2.6 设 $A(\lambda),B(\lambda)\in\mathbb{K}[\lambda]^{m\times n}$，则下列各条等价：

(1) $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$.

(2) $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$有相同的各阶行列式因子.

(3) $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$有相同的不变因子.

(4) $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$有相同的 Smith 标准形.

(5) $A(\lambda)$与 $B(\lambda)$有相同的秩和相同的初等因子组.

注意，若去掉(5)中的条件“有相同的秩”，则结论可能不成立.例如

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\lambda(\lambda+1)\end{bmatrix}\text{与 }B(\lambda)=\begin{bmatrix}1&&\\&\lambda(\lambda+1)&\\&&0\end{bmatrix}$$

有相同的初等因子组：$\lambda,(\lambda+1)$，但显然不等价，因为它们的秩不同.

三、初等因子的求法

根据定义求初等因子时，为了求出不变因子，就必须先求 $A(\lambda)$的 Smith 标准形或各阶行列式因子，一般说来是很麻烦的. 但定理 2.6 表明，等价的多项式矩阵有相同的初等因子组，这就为简化求初等因子组的运算提供了依据. 下面先介绍两个结论(但不予证明)，然后举例说明初等因子的求法.

结论 1 若 $A(\lambda)$与一个对角形多项式矩阵等价，即

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & & & & \\ & f_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & f_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

则多项式 $f_1(\lambda),f_2(\lambda),\cdots,f_r(\lambda)$的所有一次因式的方幂(首 1 的)就组成了 $A(\lambda)$的初等因子组.

结论 2 若 $A(\lambda)$与一个准对角(即分块对角)多项式矩阵等价，即

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r(\lambda) \end{bmatrix},$$

则 $A_1(\lambda),A_2(\lambda),\cdots\cdots,A_r(\lambda)$的初等因子的全体就是 $A(\lambda)$的初等因子组.

例 2.4 求

$$
A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}
$$

的初等因子组.

解

$$
A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}
$$

$$
\simeq \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} = B(\lambda).
$$

因为 $\det B(\lambda)=-(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$，所以 $D_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$，又由于 $\begin{vmatrix} -1 & \\ & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，故 $D_2(\lambda)=1$，$D_1(\lambda)=1$. 因此

$$
d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1,\ d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1),
$$

而初等因子组为 $\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$.

例 2.5 求

$$
A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

的 Smith 标准形.

解 因为

$$
A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} \lambda^2 & & & \\ & \lambda^2-\lambda & & \\ & & (\lambda-1)^2 & \\ & & & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix},
$$

所以 $A(\lambda)$的初等因子组为

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda-1)^2.$$

于是 $A(\lambda)$的不变因子为

$$d_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2, \ d_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1),$$
$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1), \ d_1(\lambda)=1.$$

故 $A(\lambda)$的 Smith 标准形是

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda(\lambda-1) & & \\ & & \lambda(\lambda-1) & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}.$$

例 2.6' 求

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \end{bmatrix}$$

的初等因子组.

解

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(\lambda) & \\ & A_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

易知 $A_1(\lambda)$的初等因子为 λ^2, $A_2(\lambda)$的初等因子组为 $\lambda, \lambda-1$. 故 $A(\lambda)$的初等因子组为 $\lambda, \lambda^2, \lambda-1$.

§2.3 矩阵的相似标准形

一、矩阵相似的充分必要条件

定义 2.8 设有 $A, B \in C^{n\times n}$,若存在可逆矩阵 $P \in C^{n\times n}$,使得 $P^{-1}AP=B$,则称 A 与 B **相似**,记为 $A \sim B$. 通常将映射 $A \mapsto B=$

$P^{-1}AP$ 称为**相似变换**，而可逆矩阵 P 称为**相似变换矩阵**.

容易验证矩阵的相似关系也具有自反性、对称性和传递性，即它是集合$C^{n\times n}$上的一种等价关系.

由定义 2.8 知，若 $A\sim B$，则存在可逆方阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$，于是

$$\lambda E-B=\lambda E-P^{-1}AP=P^{-1}(\lambda E-A)P.$$

因为 P,P^{-1}是可逆的数字矩阵，自然是单模态的，故 $\lambda E-A\simeq\lambda E-B$. 反之，也可以证明(因证明过程复杂，故从略)：若 $\lambda E-A\simeq\lambda E-B$，则 $A\sim B$. 这就得到了判定同阶方阵是否相似的一种简便方法.

定理 2.7 设 $A,B\in C^{n\times n}$，则 $A\sim B$ 的充分必要条件是 $\lambda E-A\simeq\lambda E-B$.

定理 2.6 给出了判断 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价的许多方法，从而也就有了许多判定两个矩阵相似的方法.

例 2.7 证明

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}\quad 与\quad J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

相似.

证明 由例 2.4 知，$\lambda E-A$ 的初等因子组为 $\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$，且易求出

$$\lambda E-J=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&-1&\lambda-1\end{bmatrix}$$

的初等因子组也是 $\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$，由定理 2.6 知 $\lambda E-A\simeq\lambda E-J$. 故 $A\sim J$.

二、Jordan 标准形

形式最简单的方阵是对角形矩阵. 我们知道，即使是在复数域

上，也不是所有方阵都可以对角化的．一个 n 阶方阵可对角化的充分必要条件是：A 有 n 个线性无关的特征向量或对 A 的每个 k_i 重特征值 λ_i，特征矩阵 $\lambda_i E-A$ 的秩为 $n-k_i$．下面还将给出 A 可对角化的其它一些充分必要条件．

如果将对角化的要求降低为"准对角化"，则对于所有 n 阶方阵 A，就都可找到一个与之相似的准对角形矩阵 $J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_i,\cdots,J_s)$，其中每个 J_i 的特征矩阵 λE_i-J_i 只有一个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ $\left(\sum_{i=1}^{s} n_i=n\right)$．这样的分块对角矩阵（包括对角矩阵）$J$ 就称为 A 的 Jordan 标准形．

n_i 阶方阵

$$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \lambda_i & \\ & & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}$$

称为属于（或对应于）初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 的 Jordan 块①

显然 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 是 λE_i-J_i（其中 E_i 是 n_i 阶单位矩阵）的唯一初等因子．

定义 2.9 n 阶准对角形矩阵

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix}$$

称为一个 **Jordan 标准形**，其中 J_i 是 n_i 阶 Jordan 块，$\sum_{i=1}^{s} n_i=n$．

---

① 也可将 Jordan 块写为 $\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}$．

例 2.7 中的 $J=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1\end{bmatrix}$ 就是一个 Jordan 标准形.

定理 2.8 任何 $A\in C^{n\times n}$ 都与一个 Jordan 标准形相似，除了各 Jordan 块排列的次序外，与 A 相似的 Jordan 标准形是由 A 唯一确定的.

证明 设 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(\lambda-\lambda_i)^{n_i},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

其中 $\sum_{i=1}^{s} n_i=n$. 又设 J_i 是属于 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 的 Jordan 块 $(i=1,2,\cdots,s)$. 要证

$$A\sim J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{bmatrix},$$

根据定理 2.6 和 2.7，只需证明 $\lambda E-J$ 的初等因子组也是 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\cdots,(\lambda-\lambda_i)^{n_i},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ 即可. 事实上，

$$\begin{aligned}\lambda E-J &= \lambda E-\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)\\ &=\mathrm{diag}(\lambda E_1-J_1,\lambda E_2-J_2,\cdots,\lambda E_s-J_s),\end{aligned}$$

其中 E_i 是 n_i 阶单位矩阵 $(i=1,2,\cdots,s)$. 因为 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 是 λE_i-J_i 的唯一的初等因子 $(i=1,2,\cdots,s)$，所以 $\lambda E-J$ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{n_s}.$$

因为各个 Jordan 块 J_i 是由 A 的初等因子组唯一确定的，因此若不计各 J_i 的排列次序，则 J 是唯一的，并将 J 称为 **A 的 Jordan 标准形**.

证毕.

当 $n_1=n_2=\cdots=n_n=1$ 即 $\lambda E-A$ 的初等因子都是一次方幂时，Jordan 标准形就是对角形. 于是有

定理 2.9 $A\in C^{n\times n}$ 能对角化的充分必要条件是 $\lambda E-A$ 的初

等因子都是一次方幂.

这里给出了矩阵可对角化的又一个充分必要条件,证明作为练习留给读者.

求方阵 $A\in C^{n\times n}$的 Jordan 标准形的关键在于求出 $\lambda E-A$ 的各个初等因子及其所属的 Jordan 块,举例说明如下.

例 2.8 设

$$A=\begin{bmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{bmatrix},$$

求 A 的 Jordan 标准形 J.

解

$$\begin{aligned}\lambda E-A &= \begin{bmatrix}\lambda-13 & -16 & -16\\ 5 & \lambda+7 & 6\\ 6 & 8 & \lambda+7\end{bmatrix}\\
&\simeq \begin{bmatrix}1 & -\lambda+1 & \lambda+1\\ 5 & \lambda+7 & 6\\ \lambda-13 & -16 & -16\end{bmatrix}\\
&\simeq \begin{bmatrix}1 & -\lambda+1 & \lambda+1\\ 0 & 6\lambda+2 & -5\lambda+1\\ 0 & \lambda^2-14\lambda-3 & -\lambda^2+12\lambda-3\end{bmatrix}\\
&\simeq \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+3 & -5\lambda+1\\ 0 & -2(\lambda+3) & -\lambda^2+12\lambda-3\end{bmatrix}\\
&\simeq \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+3 & 5\lambda-1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

显然 $D_1(\lambda)=1, D_3(\lambda)=(\lambda+3)(\lambda-1)^2$. 又因为

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda+3 \quad 与 \quad \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$$

没有公因式，故 $D_2(\lambda)=1$. 因此

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1,\ d_3(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-1)^2,$$

初等因子组为 $\lambda+3,\ (\lambda-1)^2$.

属于 $\lambda+3$ 的 Jordan 块 $J_1=[-3]$，属于 $(\lambda-1)^2$ 的 Jordan 块

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

例 2.9 设

$$A = \left[\begin{array}{cc:ccc} 0 & -1 & & 0 & \\ 1 & 0 & & & \\ \hdashline & & -1 & 1 & 0 \\ & 0 & -4 & 3 & 0 \\ & & 1 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

求 A 的 Jordan 标准形 J.

解 设

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

则

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}.$$

A_1, A_2 的 Jordan 标准形分别记为 $J^{(1)}$ 与 $J^{(2)}$. 于是有

$$\lambda E_1 - A_1 \simeq \lambda E_1 - J^{(1)},\ \lambda E_2 - A_2 \simeq \lambda E_2 - J^{(2)},$$

从而

$$\lambda E - A = \lambda E - \mathrm{diag}(A_1, A_2) = \mathrm{diag}(\lambda E_1 - A_1, \lambda E_2 - A_2)$$

$$\simeq \mathrm{diag}(\lambda E_1 - J^{(1)}, \lambda E_2 - J^{(2)}) = \lambda E - \mathrm{diag}(J^{(1)}, J^{(2)}).$$

所以

$$A \sim \mathrm{diag}(J^{(1)}, J^{(2)}).$$

又因为 $\mathrm{diag}(J^{(1)}, J^{(2)})$是一个 Jordan 标准形，故

$$J = \mathrm{diag}(J^{(1)}, J^{(2)}),$$

不难求得

$$J^{(1)} = \begin{bmatrix} i & \\ & -i \end{bmatrix}, \quad J^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(见例 2.7)},$$

所以

$$A \sim J = \begin{bmatrix} i & & & & \\ & -i & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

在第四章及后续课程中，读者将会看到，矩阵的 Jordan 标准形有着广泛的用途. 但是，我们也注意到，即使是实矩阵，由于其特征值不一定是实数，故在实数范围内求实矩阵的 Jordan 标准形有时是不可能的. 这时，我们需要引入其它类型的相似标准形. 由于篇幅所限，本书只介绍有理标准形.

三、有理标准形

设有多项式 $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$，$n$ 阶方阵

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0\cdots 0 & -a_n \\ & & -a_{n-1} \\ & E_{n-1} & \vdots \\ & & -a_2 \\ & & -a_1 \end{bmatrix}
$$

称为 $\varphi(\lambda)$ 的**相伴矩阵**.

定理 2.10 设 $A\in C^{n\times n}$,若特征矩阵 $\lambda E-A$ 的非常数的不变因子为

$$
\varphi_i(\lambda) = \lambda^{n_i} + a_{i1}\lambda^{n_i-1} + \cdots + a_{i(n_i-1)}\lambda + a_{in_i} \quad \left(\sum_{i=1}^{s} n_i = n\right),
$$

则

$$
A \sim C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, \cdots, C_s),
$$

其中 C_i 是 $\varphi_i(\lambda)$ 的相伴矩阵,$i=1,2,\cdots,s$.

证明 因为

$$
\lambda E - C = \mathrm{diag}(\lambda E_1 - C_1, \lambda E_2 - C_2, \cdots, \lambda E_s - C_s),
$$

而

$$
\lambda E_i - C_i = \begin{bmatrix} \lambda & & & & a_{in_i} \\ -1 & \lambda & & & a_{i(n_i-1)} \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda & a_{i2} \\ & & & -1 & \lambda + a_{i1} \end{bmatrix}
$$

$$
\simeq \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^{n_i} + a_{i1}\lambda^{n_i-1} + \cdots + a_{in_i} \end{bmatrix}
$$

(见例 2.2),$i=1,2,\cdots,s$.

由上节结论 2 知,$\lambda E-C$ 的非常数不变因子为

$$\lambda^{n_i}+a_1\lambda^{n_i-1}+\cdots+a_{i(n_i-1)}\lambda+a_{in_i}=\varphi_i(\lambda),i=1,2,\cdots,s.$$

于是

$$\lambda E-A\simeq\lambda E-C,$$

所以 $A\sim C$. 证毕.

因为不变因子不因初等变换而改变，故 C_i 是唯一确定的，因此当不计各 C_i 的排列次序时，C 也是唯一确定的，称 C 为 A **的有理标准形**. 求矩阵 A 的有理标准形，关键是求出 $\lambda E-A$ 的非常数不变因子及其相伴矩阵.

例 2.10 求

$$A=\begin{bmatrix}\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}&0\\0&\begin{matrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{matrix}\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形 J 和有理标准形 C.

解 令

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

$\lambda E-A_1=\begin{bmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{bmatrix}$ 的初等因子组为 $\lambda-i$, $\lambda+i$.

$$\lambda E-A_2=\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}0&-\lambda-1&\lambda^2-1\\0&\lambda+1&-\lambda-1\\-1&-1&\lambda\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda+1&-\lambda-1\\0&-\lambda-1&\lambda^2-1\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda^2-\lambda-2\end{bmatrix}$$

的初等因子组为 $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda-2$. 因此 $\lambda E-A$ 的初等因子组是

$\lambda-i$, $\lambda+i$, $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda-2$. 其不变因子为

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = 1,\ d_4(\lambda) = \lambda + 1,$$

$$d_5(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2,$$

故

$$J = \begin{bmatrix} i & & & & \\ & -i & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

§2.4 矩阵的零化多项式与最小多项式

一、零化多项式

设有 $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ 及 $\varphi(\lambda)=a_0\lambda^s+a_1\lambda^{s-1}+\cdots+a_{s-1}\lambda+a_s\in\mathbb{K}[\lambda]$，称

$$\varphi(A) = a_0 A^s + a_1 A^{s-1} + \cdots + a_{s-1}A + a_sE \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

为 n 阶方阵 A 的多项式. 当 $a_0\neq 0$ 时，称 $\varphi(A)$ 是 s 次的矩阵多项式.

定义 2.10 设有 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $A\neq 0$. 若存在非零多项式 $\varphi(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$，使得 $\varphi(A)=0$，则称 $\varphi(\lambda)$ 是 A 的一个**零化多项式**.

例如，若 $A^2=E$，则 $\varphi(\lambda)=\lambda^2-1$ 是 A 的一个零化多项式.

是不是任意的非零方阵都有零化多项式呢？回答是肯定的，而且不只一个. 因为对任意的 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，在 n^2 维向量空间 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中，下述 n^2+1 个向量

$$E, A, A^2, \cdots, A^n, A^{n+1}, \cdots, A^{n^2}$$

必定线性相关，故存在不全为零的 n^2+1 个数 $a_i\in\mathbb{C}$，$(i=0,1,\cdots,n^2)$，使得

$$a_0 A^{n^2} + a_1 A^{n^2-1} + \cdots + a_{n^2-1} A + a_{n^2} E = 0,$$

即非零多项式

$$\varphi(\lambda) = a_0 \lambda^{n^2} + a_1 \lambda^{n^2-1} + \cdots + a_{n^2-1}\lambda + a_{n^2}$$

是 A 的一个零化多项式.

下面的定理 2.11 说明了方阵的零化多项式不唯一.

在介绍定理 2.11 之前,我们指出:任何 $m\times n$ 阶多项式矩阵 $A(\lambda)$,都可以表示成以 $m\times n$ 阶数字矩阵为系数的多项式. $A(\lambda)$ 中各元素的最高次数称为该多项式的次数,记为 $\deg A(\lambda)$. 例如

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 & \lambda^3+\lambda \\ \lambda^3 & -\lambda^2 & 5\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\deg A(\lambda)=3$.

定理 2.11(Hamilton-Cayley 定理)　方阵的特征多项式是其零化多项式.

证明　设有 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $f(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$,欲证

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n E = 0.$$

$\lambda E-A$ 的伴随矩阵 $B(\lambda)=\mathrm{adj}(\lambda E-A)$ 在 (i,j) 位置的元素 $b_{ij}(\lambda)$ 是 $\lambda E-A$ 的代数余子式,故 $\deg b_{ij}(\lambda)\leqslant n-1$,于是 $B(\lambda)$ 可表示为

$$B(\lambda) = B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1},$$

其中 $B_0,B_1,\cdots,B_n$ 都是 n 阶数字矩阵. 因此

$$\begin{aligned} &(\lambda E-A)\cdot \mathrm{adj}(\lambda E-A) \\ &= (\lambda E-A)(B_0\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= B_0\lambda^n + (B_1 - AB_0)\lambda^{n-1} + \cdots + (B_{n-1} - AB_{n-2})\lambda - AB_{n-1},$$

又

$$(\lambda E - A)\cdot \mathrm{adj}(\lambda E - A) = \det(\lambda E - A)\cdot E = f(\lambda)E$$
$$= E\lambda^n + a_1E\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}E\lambda + a_nE,$$

于是得

$$\begin{aligned} B_0 &= E, \\ B_1 - AB_0 &= a_1E, \\ B_2 - AB_1 &= a_2E, \\ &\cdots\cdots \\ B_{n-1} - AB_{n-2} &= a_{n-1}E, \\ -AB_{n-1} &= a_nE. \end{aligned}$$

以 $A^n, A^{n-1}, \cdots, A, E$ 自上至下依次左乘等式两边，然后相加得

$$0 = A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE = f(A).$$ 证毕.

可以用此定理简化求矩阵多项式的运算，因为对于任意的 $A \in C^{n\times n}$，当 $k \geqslant n$ 时，A 的 k 次多项式可转化为次数小于 n 的多项式来计算.

例 2.11 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求 $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E$.

解 若直接计算，则须求 A^8，计算量很大，若使用 Hamilton-Cayley 定理，则只需计算 A^2.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda + 1,$$

记 $g(A) = 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E$. 以 $f(\lambda)$ 去除 $g(\lambda) = 2\lambda^8 - 3\lambda^5$

$+\lambda^4+\lambda^2-4$ 得余式 $r(\lambda)=24\lambda^2-37\lambda+10$ 及商式 $q(\lambda)$，即

$$g(\lambda)=f(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)=f(\lambda)q(\lambda)+24\lambda^2-37\lambda+10.$$

所以

$$\begin{aligned} g(A) &= f(A)q(A)+r(A)=r(A) \\ &=24A^2-37A+10E \\ &=\begin{bmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

二、最小多项式

定义 2.11 A 的次数最低且首 1 的零化多项式 $m(\lambda)$，称为 A 的**最小多项式**.

由定义及定理 2.11 可知，n 阶方阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 一定存在且次数不超过 n. 最小多项式还有下述重要性质：

(1) 最小多项式能整除任一零化多项式；

(2) 最小多项式是唯一的；

(3) 最小多项式与特征多项式有相同的零点，不同的只可能是零点的重数；

(4) 最小多项式等于特征矩阵的最后一个不变因子.

证明 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $A\neq 0$，$m(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，$f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式.

(1) 因为对于 A 的任一零化多项式 $\varphi(\lambda)$，有 $\deg m(\lambda)\leqslant\deg\varphi(\lambda)$，于是 $\varphi(\lambda)=m(\lambda)\psi(\lambda)+r(\lambda)$，且

$$\deg r(\lambda)<\deg m(\lambda), \qquad *$$

故只需证明 $r(\lambda)\equiv 0$.

假设 $r(\lambda)$ 不恒为零. 由 $\varphi(A)=0$，$m(A)=0$ 知 $r(A)=0$ 即 $r(\lambda)$ 是 A 的一个零化多项式. 于是有

$$\deg r(\lambda)\geqslant\deg m(\lambda),$$

与 * 式矛盾，所以 $r(\lambda)\equiv 0$，即 $m(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$.

(2) 请读者自证.

(3) 由 Hamilton-Cayley 定理及性质(1)知

$$f(\lambda)=m(\lambda)q(\lambda),\ q(\lambda)\in C[\lambda].$$

若 λ_0 是 $m(\lambda)$的任一零点,即 $m(\lambda_0)=0$,则

$$f(\lambda_0)=m(\lambda_0)q(\lambda_0)=0,$$

即 λ_0 也是 $f(\lambda)$的零点.

反之,设 λ_0 是 $f(\lambda)$的任一零点,即 λ_0 是 A 的特征值.设 x_0 是对应于 λ_0 的特征向量,则有 $Ax_0=\lambda x_0,\ x_0\in C^n, x_0\neq 0$.

设 $m(\lambda)=\lambda^s+b_1\lambda^{s-1}+\cdots+b_{s-1}\lambda+b_s,\ 1\leqslant s\leqslant n$.于是有

$$\begin{aligned}
m(A)x_0 &= A^sx_0+b_1A^{s-1}x_0+\cdots+b_{s-1}Ax_0+b_sEx_0\\
&=A^{s-1}Ax_0+b_1A^{s-2}Ax_0+\cdots+b_{s-1}Ax_0+b_sEx_0\\
&=A^{s-1}\lambda_0x_0+b_1A^{s-2}\lambda_0x_0+\cdots+b_{s-1}\lambda_0x_0+b_sx_0\\
&=\lambda_0A^{s-2}Ax_0+\lambda_0b_1A^{s-3}Ax_0+\cdots+b_{s-1}\lambda_0x_0+b_sx_0\\
&=\lambda_0^2A^{s-2}x_0+\lambda_0^2b_1A^{s-3}x_0+\cdots+b_{s-1}\lambda_0x_0+b_sx_0\\
&=\cdots\cdots\\
&=\lambda_0^{s-1}Ax_0+b_1\lambda_0^{s-1}x_0+\cdots+b_{s-1}\lambda_0x_0+b_sx_0\\
&=\lambda_0^{s-1}\lambda_0x_0+b_1\lambda_0^{s-1}x_0+\cdots+b_{s-1}\lambda_0x_0+b_sx_0\\
&=(\lambda_0^s+b_1\lambda_0^{s-1}+\cdots+b_{s-1}\lambda_0+b_s)x_0\\
&=m(\lambda_0)x_0.
\end{aligned}$$

因为 $m(A)=0$,$x_0\neq 0$,所以 $m(\lambda_0)=0$.

显然,当 $f(\lambda)$无重零点时,$m(\lambda)=f(\lambda)$.

(4) 设 $\lambda E-A$ 的最后一个即第 n 个不变因子为 $d_n(\lambda)$.由于 $\lambda E-A$ 的 $n-1$ 阶行列式因子 $D_{n-1}(\lambda)$是伴随矩阵 $\mathrm{adj}(\lambda E-A)$各元素的最高公因式,令

$$\mathrm{adj}(\lambda E-A)=D_{n-1}(\lambda)C(\lambda),$$

则多项式矩阵 $C(\lambda)$的各元素互质.由

$$\mathrm{adj}(\lambda E-A)\cdot(\lambda E-A)=\det(\lambda E-A)\cdot E$$

即 $$D_{n-1}(\lambda)C(\lambda)(\lambda E-A)=D_n(\lambda)E.$$
得
$$C(\lambda)(\lambda E-A)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}E=d_n(\lambda)E \tag{1}$$

设 $d_n(\lambda)=\lambda^s+b_1\lambda^{s-1}+\cdots+b_{s-1}\lambda+b_s$，$1\leqslant s\leqslant n$，则多项式矩阵 $C(\lambda)$ 可表示成以数字矩阵为系数的 $s-1$ 次多项式
$$C(\lambda)=C_0\lambda^{s-1}+C_1\lambda^{s-2}+\cdots+C_{s-2}\lambda+C_{s-1}.$$

将 $d_n(\lambda)$ 及 $C(\lambda)$ 的表达式代入(1)式并应用定理 2.11 证明中的同样技巧，不难验证 $d_n(A)=0$，即 $d_n(\lambda)$ 是 A 的零化多项式，所以 $m(\lambda)\mid d_n(\lambda)$.

另一方面，由 $\xi-\eta$ 能除尽 $m(\xi)-m(\eta)$，于是有
$$m(\xi)-m(\eta)=(\xi-\eta)g(\xi,\eta),$$
其中 $g(\xi,\eta)$ 是一个二元多项式. 用 λE 代 ξ，用 A 代 η 得
$$m(\lambda E)-m(A)=(\lambda E-A)g(\lambda E,A),$$
即
$$m(\lambda)E=(\lambda E-A)g(\lambda E,A).$$
等式两边左乘以 $\mathrm{adj}(\lambda E-A)$ 得
$$\begin{aligned}m(\lambda)\mathrm{adj}(\lambda E-A)&=\mathrm{adj}(\lambda E-A)\cdot(\lambda E-A)g(\lambda E,A)\\&=\det(\lambda E-A)\cdot g(\lambda E,A),\end{aligned}$$
即 $$m(\lambda)D_{n-1}(\lambda)C(\lambda)=D_n(\lambda)g(\lambda E,A),$$
所以 $$m(\lambda)C(\lambda)=d_n(\lambda)g(\lambda E,A).$$

上式表明，$d_n(\lambda)$ 能整除多项式矩阵 $m(\lambda)C(\lambda)$ 的各个元素，但 $C(\lambda)$ 的各元素互质，故 $d_n(\lambda)\mid m(\lambda)$.

由于 $m(\lambda)$ 和 $d_n(\lambda)$ 都是首 1 多项式，所以
$$m(\lambda)=d_n(\lambda).$$
证毕.

例 2.12 试证：相似矩阵有相同的最小多项式. 并举例说明逆命题不真.

证明 设 A 与 B 相似且最小多项式分别为 $m(\lambda)$ 与 $\varphi(\lambda)$. 假

定 $m(\lambda)=\lambda^s+b_1\lambda^{s-1}+\cdots+b_{s-1}\lambda+b_s$，则

$$m(A)=A^s+b_1A^{s-1}+\cdots+b_{s-1}A+b_sE=0.$$

设 $B=P^{-1}AP$. 因 $B^k=(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP\quad(k\in N)$，故

$$\begin{aligned}m(B)&=B^s+b_1B^{s-1}+\cdots+b_{s-1}B+b_sE\\&=P^{-1}(A^s+b_1A^{s-1}+\cdots+b_{s-1}A+b_sE)P\\&=P^{-1}m(A)P\\&=0,\end{aligned}$$

即 $m(\lambda)$是 B 的零化多项式. 由性质(1)知 $\varphi(\lambda)\mid m(\lambda)$. 同理可证 $m(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$. 故 $m(\lambda)=\varphi(\lambda)$. 于是命题得证. 反之不真，例如矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\quad 与\quad B=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$$

显然不相似，但却有相同的最小多项式$(\lambda-1)(\lambda-2)$.

下面举例说明最小多项式的求法.

例 2.13 求

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\2&1&0\end{bmatrix}$$

的最小多项式.

解

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\4&\lambda+2&0\\-2&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3,$$

A 的最小多项式只可能是λ, λ^2, λ^3 三者之一. 因 $A\neq0$，故 $m(\lambda)\neq\lambda$. 因为

$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\2&1&0\end{bmatrix}^2=0,$$

所以 A 的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda^2$.

为便于记忆，我们不妨把例 2.13 中求最小多项式的方法称为"分解-检验法".

例 2.14 求

$$A=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

的最小多项式 $m(\lambda)$.

解

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-7 & -4 & 1\\ -4 & \lambda-7 & 1\\ 4 & 4 & \lambda-4\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}\lambda-7 & -4 & 1\\ -\lambda+3 & \lambda-3 & 0\\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}\lambda-7 & -5 & 1\\ -\lambda+3 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}\lambda-12 & -5 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}\lambda-12 & -5 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ -(\lambda-3)(\lambda-12) & 5(\lambda-3) & 0\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ (\lambda-3)(\lambda-12) & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda-3 & \\ & & (\lambda-3)(\lambda-12)\end{bmatrix}$$

所以 $\quad m(\lambda)=d_3(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-12)$.

例 2.15　求

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

的最小多项式.

解　A 是一个 n 阶 Jordan 块，其唯一的初等因子为 $(\lambda-a)^n$，于是 $d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$，所以

$$m(\lambda)=d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n.$$

例 2.14 和例 2.15 的方法不妨称为"不变因子法".

三、方阵可对角化的又一充分必要条件

方阵的最小多项式有广泛的用途，下面介绍它在判定方阵是否能对角化方面的应用.

定理 2.12　$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$可对角化的充分必要条件是 A 的最小多项式无重零点.

证明　由定理 2.9 及最小多项式的性质(4)即得.

推论　$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$可对角化的充分必要条件是，$A$ 存在一个无重零点的零化多项式.

证明作为练习留给读者.

例 2.16　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$满足 $A^2=E$，试证

$$A\sim\begin{bmatrix} E_r & \\ & -E_{n-r} \end{bmatrix}.$$

证明　因为 $A^2=E$，即 $A^2-E=0$，于是 $\varphi(\lambda)=\lambda^2-1$ 是 A 的零化多项式且无重零点，所以 A 可对角化.

由 $\lambda^2-1=0$ 得 A 的谱 $\sigma(A)\subset\{-1,1\}$. 设有 r 个 $+1$，$n-r$ 个 -1 $(1\leqslant r\leqslant n)$，故

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \overset{r\text{个}}{\ddots} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & \\ & -E_{n-r} \end{bmatrix}.$$

例 2.17 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

利用 A 的 Jordan 标准形 J 求 A^5.

解 由于

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & -5 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$$

无重零点，故 A 可对角化，A 的 Jordan 标准形

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{bmatrix}.$$

余下的主要工作就是求出相似变换矩阵 P 及其逆矩阵. 因为 $P^{-1}AP = J, A = PJP^{-1}$，所以

$$A^5 = PJ^5P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5^5 & \\ & & -5^5 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

设 $P = [x, y, z]$，$x, y, z \in C^3$ 且为列向量. 由 $AP = PJ$ 即

$$A[x, y, z] = [x, y, z] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{bmatrix}$$

得

$$(A-E)x=0,\ (A-5E)y=0,\ (A+5E)z=0.$$

解之可得

$$x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\ z=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

于是

$$P=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&1\end{bmatrix}.$$

所以

$$A^5=PJ^5P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&5^5&\\&&-5^5\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5&0&-5\\0&1&2\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2500&2499\\0&-1875&2500\\0&2500&1875\end{bmatrix}.$$

读者可能已经注意到，相似变换矩阵 P 并不唯一，但这不影响最后结果.

§2.5 正规矩阵及其酉对角化

本节的主要内容是：正规矩阵概念及其性质；正规矩阵（重点是 Hermite 矩阵）的酉对角化方法；Hermite 矩阵和 Hermite 二次型的标准形及其分类.

一、正规矩阵、酉矩阵、Hermite 矩阵

定义 2.12 设 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$. 若 $A^HA=AA^H$（其中 $A^H=\overline{A^T}=(\overline{A})^T$ 称为 A 的共轭转置矩阵），则称 A 是**正规矩阵**. 若 $A^HA=$

$AA^H=E$，则称 A 是**酉矩阵**. 若 $A^H=A$ 即 $a_{ji}=\overline{a_{ij}}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 是 **Hermite 矩阵**.

例 2.18 直接验证可知：

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$是正规矩阵，$B=\begin{bmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$是酉矩阵，$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & i\\ 1 & 0 & -i\\ -i & i & 0\end{bmatrix}$是 Hermite 矩阵.

(2) 酉矩阵和 Hermite 矩阵都是正规矩阵.

(3) 若 $A^H=-A$，则称 A 是反 Hermite 矩阵. 反 Hermite 矩阵也是正规矩阵，因为 $A^HA=(-A)(-A^H)=AA^H$.

在空间$\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基下，正规矩阵、酉矩阵和 Hermite 矩阵所对应的线性变换，分别称为**正规算子**、**酉算子**和 **Hermite 算子**（或自伴算子）.

当 A 是实矩阵时，酉矩阵就是正交矩阵，Hermite 矩阵就是对称矩阵.

二、酉矩阵的性质

同正交矩阵类似，酉矩阵也具有很好的性质.

性质 1. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则下列各条等价：

(1) A 是酉矩阵.

(2) $A^{-1}=A^H$.

(3) A 的列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是标准正交的，即

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\begin{cases}0 & \text{当 } i\neq j\\ 1 & \text{当 } i=j\end{cases}.$$

(4) A 的行向量组是标准正交的.

证明 由酉矩阵定义立即可知(1)与(2)等价，现证(1)与(3)

等价. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n],\ \alpha_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n,$$

$$j=1,2,\cdots,n.$$

(1)⇒(3) 因为 $A^HA=E$,即

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_n^H \end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix} \alpha_1^H\alpha_1 & \alpha_1^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^H\alpha_n \\ \alpha_2^H\alpha_1 & \alpha_2^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^H\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^H\alpha_1 & \alpha_n^H\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^H\alpha_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

所以 $\alpha_i^H\alpha_j=\begin{cases} 0 & \text{当 } i\neq j \\ 1 & \text{当 } i=j \end{cases}$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 故

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\alpha_i^T\overline{\alpha}_j=\overline{\alpha_i^H\alpha_j}=\begin{cases} 0 & \text{当 } i\neq j \\ 1 & \text{当 } i=j \end{cases},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

即 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是标准正交的.

(3)⇒(1) 以上过程是可逆的,于是有 $A^HA=E$. 又因为 $BA=E$ 当且仅当 $AB=E$,所以也有 $AA^H=E$,即 A 是酉矩阵.

类似地可证(1)与(4)等价. 证毕.

性质 2 设 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵,则

(1) $\overline{U}$, U^T, U^H, U^{-1} 及 $\mathrm{adj}U$ 都是酉矩阵;

(2) $|\det U|=1$;

(3) 设 $y\in\mathbb{C}^n$,若 $x=Uy$,则

$$\|x\|_2=\|Uy\|_2=\|y\|_2,$$

即酉变换是保持范数的;

(4) U 的所有特征值的模都等于 1;

(5) 若 $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵,则 UV 是酉矩阵.

证明 (1)、(5)由定义直接可得.

(2) 因为 $U^H U=E$，所以有

$$1=\det(U^H U)=(\det U^H)(\det U)$$
$$=(\overline{\det U})(\det U)=|\det U|^2,$$

即 $|\det U|=1$.

(3) $\|x\|_2^2=\|Uy\|_2^2=(Uy)^H(Uy)=y^H U^H U y=y^H y$
$$=\|y\|_2^2,$$

所以 $\|Uy\|_2=\|y\|_2$.

(4) 设 λ 是 U 的任一特征值，x 是对应于 λ 的特征向量，于是有

$$|\lambda|\|x\|=\|\lambda x\|=\|Ux\|=\|x\|.$$

因为 $\|x\|\neq 0$，所以 $|\lambda|=1$. 证毕.

定理 2.13 (Schur 酉三角化定理) 设 $A\in C^{n\times n}$，则必存在酉矩阵 $U\in C^{n\times n}$，使得 $U^H AU=T$，其中 $T=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$ 是上三角矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为实数，则可选择 U 为实正交矩阵.

证明 设 $x^{(1)}$ 是 A 的对应于 λ_1 的单位特征向量，则 $x^{(1)}$ 可扩充为 C^n 的一个基

$$x^{(1)},y^{(2)},y^{(3)},\cdots,y^{(n)}.$$

再用 Gram-Schmidt 标准正交化方法，将其化为 C^n 的一个标准正交基

$$x^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},\cdots,z^{(n)}.$$

于是 $U_1=[x^{(1)},z^{(2)},\cdots,z^{(n)}]$ 是酉矩阵.

因为 $$AU_1=[Ax^{(1)},Az^{(2)},\cdots,Az^{(n)}]$$
$$=[\lambda_1 x^{(1)},Az^{(2)},\cdots,Az^{(n)}],$$

所以

$$U_1^H A U_1 = \begin{bmatrix} (x^{(1)})^H \\ (z^{(2)})^H \\ \vdots \\ (z^{(n)})^H \end{bmatrix} [\lambda_1 x^{(1)}, Az^{(2)}, \cdots, Az^{(n)}] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] \xlongequal{\text{记为}} B.$$

因为 $A \sim B$,所以 B 的特征多项式

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) f_1(\lambda) = \det(\lambda E - A)$$
$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

故 A_1 的特征多项式

$$f_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

设 $x^{(2)} \in C^{n-1}$ 是 A_1 的对应于 λ_2 的单位特征向量. 完全重复上述步骤,我们得到一个酉矩阵 $U_2 \in C^{(n-1)\times(n-1)}$,使得

$$U_2^H A_1 U_2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 & ☆ \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right].$$

若令

$$V_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right]$$

则 V_2 和 $U_1 V_2$ 都是 n 阶酉矩阵,于是

$$(U_1 V_2)^H A (U_1 V_2) = V_2^H U_1^H A U_1 V_2$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^H \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & ※ \\ \hline 0 & U_2^H A_1 U_2 \end{array}\right]$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & ※ & \\ 0 & \lambda_2 & ☆ \\ & 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

继续作这种化简,便得到 $n-1$ 个酉矩阵

$$U_1 \in C^{n\times n},\ U_2 \in C^{(n-1)\times(n-1)}, \cdots, U_{n-1} \in C^{2\times 2},$$

及 $n-2$ 个酉矩阵 $V_i \in C^{n\times n}, i = 2, 3, \cdots, n-1$.

令 $U=U_1V_2V_3\cdots V_{n-1}$，则 U 是酉矩阵且使得

$$U^HAU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

——主对角元素为 A 的特征值的上三角矩阵.

若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征值全为实数，则相应的特征向量可选为实向量，且上述步骤均可在实数域上完成，即 U 可为实的正交矩阵.

证毕.

将定理 2.13 中的"上三角矩阵"改为"下三角矩阵"，结论仍然成立，当然要对应不同的酉矩阵.

三、正规矩阵的性质

定理 2.14 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是三角矩阵. 若 A 又是正规矩阵，则 A 是对角矩阵.

证明 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$.

由 $A^HA=AA^H$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ik}a_{ik}=\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{kj}a_{kj},\quad k=1,2,\cdots n.$$

因为当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，所以

$$\sum_{i=1}^{k}\bar{a}_{ik}a_{ik}=\sum_{j=k}^{n}\bar{a}_{kj}a_{kj},$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}|a_{ik}|^2=\sum_{j=k}^{n}|a_{kj}|^2,\quad (k=1,2,\cdots,n).\qquad (1)$$

当 $k=1$ 时，(1)式为

$$|a_{11}|^2=|a_{11}|^2+\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|^2.$$

于是

$$\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|^2 = 0.$$

所以 $a_{1j}=0$, $j=2,3,\cdots,n$.

当 $k=2$ 时,⟨1⟩式为

$$|a_{12}|^2 + |a_{22}|^2 = |a_{22}|^2 + \sum_{j=3}^{n}|a_{2j}|^2.$$

因为 $a_{12}=0$,故可得 $a_{2j}=0, j=3,4,\cdots,n$.

对 $k=3,4,\cdots,n$ 采用同样方法即可得:当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$, $i=1,2,\cdots,n$.

所以 A 是对角矩阵. 证毕.

定理 2.15 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则下列各条等价:

(1) A 是正规矩阵.

(2) A 可酉对角化,即存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$,使得

$$U^H AU=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

(3) $\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$.

(4) 空间$\mathbb{C}^n$ 存在由 A 的 n 个特征向量组成的标准正交基.

证明 为完成定理的证明,我们将证明(1)、(3)、(4)均与(2)等价.

(1)⇒(2) 由定理 2.13 知,对于 A 必存在酉矩阵 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$,使得 $U^HAU=T$,其中 T 是三角矩阵. 若 A 是正规矩阵,则

$$\begin{aligned}T^H T &=(U^HAU)^H(U^HAU)=U^HA^HUU^HAU=U^HA^HAU\\ &=U^HAA^HU=(U^HAU)(U^HA^HU)=TT^H,\end{aligned}$$

即三角矩阵 T 也是正规矩阵. 由定理 2.14 知,T 是对角矩阵且

$$T = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

(2)⇒(1) 因为 $A=U\Lambda U^H$,容易验证 $A^HA=AA^H$,故 A 是正规矩阵.

(2)⇒(3) 作矩阵的乘法便知

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \operatorname{tr}(A^H A).$$

由(2)，$A=U\Lambda U^H$ 于是有

$$A^H A = (U\Lambda U^H)^H(U\Lambda U^H) = U\bar{\Lambda}\Lambda U^H = U\bar{\Lambda}\Lambda U^{-1},$$

即 $A^H A\sim\bar{\Lambda}\Lambda$，所以

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \operatorname{tr}(A^H A) = \operatorname{tr}(\bar{\Lambda}\Lambda) = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.$$

(3)⇒(2) 由 Schur 酉三角化定理知，存在酉矩阵 U，使得 $U^H AU=T$，故 $A=UTU^H$，其中

$$T=\begin{bmatrix}\lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & t_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

而 $A^H A=(UTU^H)^H(UTU^H)=UT^H TU^H$，即 $A^H A\sim T^H T$，

故 $\operatorname{tr}(A^H A)=\operatorname{tr}(T^H T)$. 因为 $\operatorname{tr}(T^H T)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{i<j}|t_{ij}|^2$，所以

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 + \sum_{i<j}|t_{ij}|^2.$$

但条件(3)意味着 $\sum_{i<j}|t_{ij}|^2=0$，即 $t_{ij}=0,(i<j)$. 因此 T 是对角矩阵 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

(2)⇒(4) 因为存在酉矩阵 U，使得

$$U^H AU = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

于是 $AU=U\Lambda$. 设 $U=[u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(n)}]$，所以

$$[Au^{(1)},Au^{(2)},\cdots,Au^{(n)}] = [\lambda_1 u^{(1)},\lambda_2 u^{(2)},\cdots,\lambda_n u^{(n)}],$$

$$Au^{(i)} = \lambda_i u^{(i)},\ i = 1,2,\cdots,n,$$

即 $u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(n)}$ 是 A 的 n 个特征向量. 又因为 $\{u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(n)}\}$ 是标准正交的，故成为 C^n 的一个标准正交基.

(4)⇒(2) 设$\mathbb{C}^n$有一个由 A 的 n 个特征向量组成的标准正交基$\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}\}$.

令 $P=[x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}]$,则 P 是酉矩阵. 所以

$$\begin{aligned}P^HAP &= P^HA[x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}]\\ &=P^H[Ax^{(1)},Ax^{(2)},\cdots,Ax^{(n)}]\\ &=P^H[\lambda_1x^{(1)},\lambda_2x^{(2)},\cdots,\lambda_nx^{(n)}]\\ &=P^H[x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}]\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\ &=P^HP\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\ &=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).\end{aligned}$$

证毕.

(1)与(2)的等价性通常称为正规矩阵的谱定理,它表明任何正规矩阵必与对角矩阵相似且可酉对角化.

四、Hermite 矩阵的性质

由于 Hermite 矩阵是正规矩阵,故由定理 2.15 立即可得 Hermite 矩阵的谱定理.

定理 2.16 若 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是 Hermite 矩阵,则 A 可酉对角化.

Hermite 矩阵除具有正规矩阵的性质外,还有以下重要性质.

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$是 Hermite 矩阵,则

(1) A 的主对角元素都是实数;

(2) 对任意的 $x\in\mathbb{C}^n$,$f=x^HAx$ 是实数,且

$$x^HAx = \langle Ax,x\rangle = \langle x,Ax\rangle;$$

(3) A 的所有特征值都是实数;

(4) 对应于不同特征值的特征向量是正交的;

(5) 对于任意的 $C\in\mathbb{C}^{n\times n}$,$C^HAC$ 是 Hermite 矩阵.

证明 (1) 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$,由 $A^H=A$ 得 $\bar{a}_{ii}=a_{ii}$,故 a_{ii}是实数,$i=1,2,\cdots,n$.

(2) $\overline{x^HAx}=(\overline{x^HAx})^T=(x^T\,\overline{A}\overline{x})^T=x^HA^Hx=x^HAx$,所以 $f=x^HAx$是实数. 且

$$x^HAx = \overline{x^HA^Hx} = x^TA^T\overline{x} = (Ax)^T\overline{x} = \langle Ax,x\rangle$$

$$=\overline{\langle Ax,x\rangle}=\langle x,Ax\rangle.$$

(3) 设 λ 是 A 的任一特征值，x 是对应于 λ 的特征向量，即 $Ax=\lambda x$ 且 $x\neq 0$. 于是有

$$\lambda\langle x,x\rangle=\langle \lambda x,x\rangle=\langle Ax,x\rangle=\langle x,Ax\rangle=\langle x,\lambda x\rangle$$
$$=\bar{\lambda}\langle x,x\rangle,$$

因为 $x\neq 0$，所以 $\langle x,x\rangle\neq 0$，故 $\lambda=\bar{\lambda}$，即 λ 是实数.

(4) 设 λ,μ 是 A 的任意两个不相等的特征值，x,y 分别是对应于 λ 和 μ 的特征向量，则

$$\lambda\langle x,y\rangle=\langle \lambda x,y\rangle=\langle Ax,y\rangle=(Ax)^T\overline{y}=x^TA^T\overline{y}$$
$$=x^T\overline{A^Hy}=x^T\overline{Ay}=\langle x,Ay\rangle=\langle x,\mu y\rangle=\mu\langle x,y\rangle.$$

因为 $\lambda\neq\mu$，所以 $\langle x,y\rangle=0$，即 x 与 y 正交.

(5) 因为 $(C^HAC)^H=C^HA^HC=C^HAC$，故 C^HAC 是 Hermite 矩阵. 证毕.

例2.19 $A\in C^{n\times n}$ 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是，A 为正规矩阵且 A 的特征值均为实数.

证明 必要性由例2.18及定理2.16得证，下证充分性.

因为 A 是正规矩阵，故存在酉矩阵 U，使得

$$U^HAU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

从而

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H,$$

于是由 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数，有

$$A^H=(U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H)^H=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U^H=A,$$

故 A 是 Hermite 矩阵.

例2.20 求使 $A=\begin{bmatrix}0&1&i\\1&0&-i\\-i&i&0\end{bmatrix}$ 对角化的酉矩阵 U 并写出与 A 相应的对角矩阵 Λ.

解 因 A 是 Hermite 矩阵，故可酉对角化. 下面分三步求 U：

(1) 令

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -i\\ -1 & \lambda & i\\ i & -i & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

得 A 的全部特征值 $\lambda_{1,2}=1$，$\lambda_3=-2$.

(2) 对于 $\lambda=1$,解方程$(E-A)x=0$.

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T$,则方程化为

$$\begin{cases}\xi_1-\xi_2-i\xi_3=0\\ -\xi_1+\xi_2+i\xi_3=0\\ i\xi_1-i\xi_2+\xi_3=0\end{cases},$$

解之得 $\xi_1=\xi_2+i\xi_3$.

若取 $\xi_2=1,\xi_3=0$,得 $x_1^{(1)}=(1,1,0)^T$. 若取 $\xi_2=0,\xi_3=1$,得 $x_1^{(2)}=(i,1,0)^T$. $\{x_1^{(1)},x_1^{(2)}\}$线性无关但不正交,用 Gram-Schmidt 正交化方法将其正交化:

$$\beta_1=x_1^{(1)}=(1,1,0)^T,\ \beta_2=x_1^{(2)}-\frac{\langle x_1^{(2)},\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}=\left(\frac{i}{2},-\frac{i}{2},1\right)^T.$$

显然 β_2仍是 A 的对应于 $\lambda=1$的特征向量.

对于 $\lambda=-2$,解方程$(-2E-A)x=0$得 $x_2=(i,-i,-1)^T$.

令 $\beta_3=x_2=(i,-i,-1)^T$,则 β_1,β_2,β_3是 A 的三个正交的特征向量.

(3) 将 β_1,β_2,β_3单位化为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}i/\sqrt{6}\\-i/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}i/\sqrt{3}\\-i/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

则

$$U=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & -i/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

即为所求，且

$$U^H AU = \mathrm{diag}(1,1,-2) = \Lambda.$$

注意，U 不是唯一的，且在 Λ 中各特征值 λ_i 的次序应与其对应的特征向量 α_i 在 U 中的位置一致．

五、Hermite 二次型

定义2.13　设 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$．若 $A^H=A$，即 $a_{ji}=\overline{a_{ij}}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j \text{ 即 } f = x^H Ax$$

称为复变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 Hermite 二次型．并称 $\mathrm{rank}A$ 为 Hermite 二次型 $f=x^H Ax$ 的秩．

对于 $f=x^H Ax$，同实二次型一样，常常要用到它的标准形

$$f = y^H \Lambda y = \lambda_1\bar{y}_1 y_1 + \lambda_2\bar{y}_2 y_2 + \cdots + \lambda_n\bar{y}_n y_n \qquad (2.3)$$

及规范形

$$f = \bar{z}_1 z_1 + \cdots + \bar{z}_p z_p - \bar{z}_{p+1} z_{p+1} - \cdots - \bar{z}_r z_r, \qquad (2.4)$$

其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in C^n$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i$ 是 A 的特征值$(i=1,2,\cdots,n)$．　$z_i\in C$，$i=1,2,\cdots,r$．$r=\mathrm{rank}A$．

定理2.15指出，通过作酉变换 $x=Uy$，即可将 $f=x^H Ax$ 化为标准形 $f=y^H\Lambda y$．再作一个简单的满秩线性变换就可将标准形化为规范形．

例2.21　求一个酉变换 $x=Uy$，将 Hermite 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2+i\bar{x}_1x_3+\bar{x}_2x_1-i\bar{x}_2x_3-i\bar{x}_3x_1+i\bar{x}_3x_2$$

化为标准形．然后再化为规范形．

解

$$f = [\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3]\begin{bmatrix}0 & 1 & i\\ 1 & 0 & -i\\ -i & i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} x^H Ax.\ \mathrm{rank}A = 3.$$

由例2.20，存在酉矩阵

$$U=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & -i/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

使得 $A=U\operatorname{diag}(1,1,-2)U^H$. 作酉变换 $x=Uy$(其中 $y=(y_1,y_2,y_3)^T\in\mathbb{C}^3$),便得标准形

$$\begin{aligned}f=x^HAx&=(Uy)^HU\operatorname{diag}(1,1,-2)U^H(Uy)\\&=y^H\operatorname{diag}(1,1,-2)y\\&=\bar{y}_1y_1+\bar{y}_2y_2-2\bar{y}_3y_3.\end{aligned}$$

再作变换 $y=Bz$,其中 $B=\operatorname{diag}\left(1,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,$z=(z_1,z_2,z_3)^T\in\mathbb{C}^3$,即令 $y_1=z_1,y_2=z_2,y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}z_3$,得规范形

$$f=\bar{z}_1z_1+\bar{z}_2z_2-\bar{z}_3z_3.$$

同实二次型一样,规范形中正的项数和负的项数与所作的满秩线性变换无关,并分别称为正惯性指数和负惯性指数. 显然正惯性指数 p 与负惯性指数 N 之和等于 Hermite 二次型的秩 r.

六、正定矩阵及其性质

定义2.14　设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$且 $A^H=A$. 对任意非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{C}^n$,若恒有 $f=x^HAx>0$,则称 f **是正定的 Hermite 二次型**,A 称为**正定矩阵**. 若恒有 $f=x^HAx\geqslant0$,则称 f **是半正定的二次型**,A **是半正定矩阵**.

同样可定义负定、半负定 Hermite 二次型和负定、半负定矩阵. 若存在$\mathbb{C}^n$ 中的向量 $x\neq0$ 和 $y\neq0$, 使得 $f=x^HA\,x>0$,而 $f=y^HAy<0$,则称 f(或 A)**是不定的**.

定理2.17　若 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$是正定(或半正定)矩阵,则 A 的各阶顺序主子阵 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$都是正定(或半正定)矩阵.

证明

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

若记

$$B = \begin{bmatrix} a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k(k+1)} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} a_{(k+1)1} & \cdots & a_{(k+1)k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{(k+1)(k+1)} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

则 $A=\begin{bmatrix} A_k & B \\ C & D \end{bmatrix}$. 显然 A_k 是 Hermite 矩阵.

设 $u=(x_1,x_2,\cdots,x_k)^T\in C^k$ 是任意的非零列向量. 若令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0)^T\in C^n$,则 x 是 n 维非零列向量. 记

$$x=\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中0是 $n-k$ 维零向量.

由题设,A 是正定矩阵,故有 $x^H Ax>0$. 而

$$x^H Ax = [u^H,0]\begin{bmatrix} A_k & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = u^H A_k u$$

即 $u^H A_k u>0$,故 A_k 是正定的. 将“$>$”改为“$\geqslant$”,就证明了半正定的情况. 证毕.

定理2.18 n 阶 Hermite 矩阵 A 是正定的,当且仅当 A 满足下列诸条件之一:

(1) A 的所有特征值都大于零.

(2) 存在可逆矩阵 $P\in C^{n\times n}$,使得 $P^H A P=E$.

(3) 存在可逆矩阵 $Q\in C^{n\times n}$,使得 $A=Q^H Q$.

(4) A 的各阶顺序主子式 $\det A_k$ 均大于零.

证明

(1) 必要性. 设 λ 是 A 的任一特征值, $x\neq 0$是对应于 λ 的特征向量. 因为 A 是正定的, 故

$$\lambda\langle x,x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \langle Ax,x\rangle = x^H Ax > 0.$$

又因为 $x\neq 0$, 则 $\langle x,x\rangle>0$, 所以 $\lambda>0$.

充分性. 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因为 A 是 Hermite 矩阵, 故存在酉变换 $x=Uy$, 使得

$$\begin{aligned} x^H Ax &= y^H \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)y \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \bar{y}_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i |y_i|^2. \end{aligned}$$

对于任意的非零向量 x, $y=U^{-1}x$ 也是非零向量, 故 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 不全为零. 因为所有的 $\lambda_i>0$, 所以

$$x^H Ax = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i |y_i|^2 > 0,$$

即 A 是正定的.

(2) 若是 A 正定的, 由(1)知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均大于零. 令 $B=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$, 则 B 可逆. 又因为存在酉矩阵 U, 使得

$$U^H AU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

所以 $B^H U^H AUB=E$. 即存在可逆矩阵 $P=UB$, 使得 $P^H AP=E$.

反之, 若存在可逆矩阵 P, 使得 $P^H AP=E$, 则 $A=(P^H)^{-1}P^{-1}=(P^{-1})^H P^{-1}=Q^H Q$, 其中 $Q=P^{-1}$, 对于任意非零向量 x, $Qx\neq 0$, 故

$$x^H Ax=x^H Q^H Qx=\langle Qx,Qx\rangle>0,$$

即 A 是正定矩阵.

(3) 在证明(2)的过程中已证明了本结论.

(4) 由(1)及定理2.17易知条件是必要的.关于充分性的证明比较复杂(参见[7]),此处从略. 证毕.

推论 若 A 是正定(或半正定)矩阵,则 A 的行列式、迹、各阶主子式都是正(或非负)的.

由于当 A 负定时,$-A$ 是正定的,故可得 A 是负定的充分必要条件是:A 的所有特征值都是负的,或所有偶数阶的顺序主子式都大于零,而一切奇数阶顺序主子式都小于零.

习 题 二

1. 已知数字矩阵 A,试用初等变换求 $\lambda E-A$ 的 Smith 标准形和不变因子.

(1) $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$; (2) $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$;

(3) $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-5&-4&-3&-2\end{bmatrix}$; (4) $A=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-7&-6&-1&0\end{bmatrix}$.

2. 求下列多项式矩阵的不变因子和初等因子.

(1) $A(\lambda)=\begin{bmatrix}0&0&1&\lambda+2\\0&1&\lambda+2&0\\1&\lambda+2&0&0\\\lambda+2&0&0&0\end{bmatrix}$;

(2) $B(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+a&0&1&0\\0&\lambda+a&0&1\\0&0&\lambda+a&0\\0&0&0&\lambda+a\end{bmatrix}$;

(3) $C(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{bmatrix}$;

(4) $D(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 7 & 6 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$.

3*. 求下列多项式矩阵的 Smith 标准形和初等因子组.

(1) $\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0\\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0\\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

4. 证明 $A\in C^{n\times n}$ 与 A^T 相似.

5. 证明下列矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}\quad 和\quad C=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$$

中的任何两个都不能相似.

6. 求下列矩阵的 Jordan 标准形.

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}3 & 7 & -3\\ -2 & -5 & 2\\ -4 & -10 & 3\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ 7 & 1 & 2 & 1\\ -17 & -6 & -1 & 0\end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix}0 & \cdots\cdots & 0 & 0\\ 1 & \cdots\cdots & 0 & 0\\ & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & 1 & 0\end{bmatrix}$.

7. 求下列矩阵的有理标准形.

(1) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$; (2) $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -5 & -4 & -3 & -2\end{bmatrix}$.

8. 已知 A 的 Jordan 的标准形是

$$J=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & 1 & 2\end{bmatrix},$$

求 A 的有理标准形 C.

9. 设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

求 $g(A)=A^7-A^5-19A^4+28A^3+6A-4E$.

10. 设 $A\in C^{n\times n}$可逆,试证 A^{-1}可表示为 A 的多项式.

11. 求下列矩阵的最小多项式.

(1) $A=\begin{bmatrix}7 & 4 & -4\\ 4 & -8 & -1\\ -4 & -1 & -8\end{bmatrix}$; (2) $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$;

(3) $C=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

12. (1) 证明定理2.9;

(2) 证明定理2.12的推论.

13. 证明满足下列条件之一的矩阵 $A\in C^{n\times n}$可对角化.

(1) $A^2+A=2E$; (2) $A^m=E$ $(m\in N)$.

14. 设 $A\in C^{n\times n}$是正规矩阵,试证

(1) A 是反 Hermite 矩阵的充分必要条件是 A 的特征值为零或纯虚数;

(2) 对应于不同特征值的特征向量是正交的.

15. 设 $A,B\in C^{n\times n}$都是 Hermite 矩阵,试证:AB 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

16. 将矩阵 A 酉对角化:

(1) $A=\begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;　　　(2) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{bmatrix}$.

17. 求使二次型

$$f=-\bar{x}_1x_1+i\bar{x}_1x_2-i\bar{x}_2x_1-i\bar{x}_2x_3+i\bar{x}_3x_2-\bar{x}_3x_3$$

成为标准形的酉变换,并判断 f 是否是正定二次型.

18. 设 $A\in C^{n\times n}$ 是半正定矩阵,则 A 是正定的当且仅当 A 是非奇异的.

19. 设 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 是内积空间 C^n 中任一向量组,令

$$H_n=[h_{ij}]=[\langle u_j,u_i\rangle]=\begin{bmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_2,u_1\rangle & \cdots & \langle u_n,u_1\rangle \\ \langle u_1,u_2\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \cdots & \langle u_n,u_2\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle u_1,u_n\rangle & \langle u_2,u_n\rangle & \cdots & \langle u_n,u_n\rangle \end{bmatrix}.$$

(1) 验证 H_n 是 Hermite 矩阵;

(2) 证明 H_n 是半正定的;

(3) 证明 H_n 是非奇异的充分必要条件是 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 线性无关.

第三章　赋范线性空间及有界线性算子

赋予范数的线性空间构成为赋范线性空间.赋范线性空间是泛函分析研究的一类重要的空间.任何内积空间(关于由内积导出的范数)都是赋范线性空间.

本章中,首先介绍赋范线性空间的定义,空间中序列的收敛性和映射的连续性等基本的分析性质.在此基础上,研究赋范线性空间中的各种点集、空间或集合的紧性、有界线性算子和有界线性泛函.为了有助于本书后继部分的学习,本章还介绍有限维赋范线性空间的性质以及方阵范数的内容.

另外,从本书的结构来讲,第三节关于度量空间的内容是独立的,即后面未用到第三节的结论.度量空间是比赋范线性空间更广泛的一类空间.度量空间不具有线性结构.但是容易看到,赋范线性空间的很多分析性质实际上在度量空间中也是成立的.在第四节中,简略地介绍了建立 Lebesgue 积分的思想、Lebesgue 积分的有关性质以及在数学许多分支中应用较多的 L^p 空间.

§3.1　赋范线性空间

在熟知的$\mathbb{R}^2$ 空间中,每一个向量 $x=(\xi_1,\xi_2)^T$ 对应于它的长度 $\|x\|=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}}$.把此对应(即一个映射)所具有的几条基本性质抽象到一般线性空间,作为赋范线性空间的定义.赋范线性空间中序列的收敛性和映射的连续性等基本的分析性质是本节研究的主要内容.完备的赋范线性空间,即 Banach 空间,也是本节研究的一个重要内容.

一、赋范线性空间的定义

定义 3.1 设 X 是数域$\mathbb{K}$上的线性空间. 若 $\|\cdot\|$ 是 X 到实数域$\mathbb{R}$的映射，对于任意 $x,y\in X$ 以及 $\alpha\in\mathbb{K}$ 满足条件：

(1) $\|x\|\geqslant 0$，并且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$，

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$，

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$（三角不等式），

则 $\|\cdot\|$ 称为 X 上的**范数**，$(X,\|\cdot\|)$ 称为**赋范线性空间**. 在范数不致于混淆的情况下，赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 可简记为 X. 对于 $x\in X$，$\|x\|$ 称为 x 的范数.

当$\mathbb{K}$为复数域$\mathbb{C}$时，赋范线性空间 X 称为复赋范线性空间；当$\mathbb{K}$为实数域$\mathbb{R}$时，赋范线性空间 X 称为实赋范线性空间.

由定义可知，任何内积空间（关于由内积导出的范数）都是赋范线性空间. 具体地说，若 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，对于任意 $x\in X$，令

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

（见定义 1.19），则 $\|\cdot\|$ 满足定义 3.1 的条件. 因此，$(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间.

内积空间$\mathbb{C}^n$，$\mathbb{R}^n$，l^2 等（关于由内积导出的范数）都是赋范线性空间.

在$\mathbb{R}^2$中，定义 3.1 的条件(3)的几何意义，就是"三角形两边之和大于第三边"这一原理（见图 3-1）.

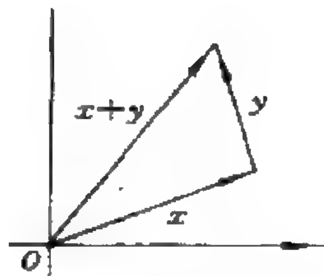

图 3-1

下面再举一些赋范线性空间的例子.

例 3.1 在线性空间 l^p $(1\leqslant p<\infty)$ 上，对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，通常定义

$$\| x \| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}},$$

则 l^p 是赋范线性空间.

例 3.2 l^∞ 表示有界实数(或复数)列($\xi_1,\xi_2,\cdots$)的全体组成的集合.对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^\infty$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$),定义线性运算为

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots)$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots),$$

则 l^∞ 成为线性空间.通常定义

$$\| x \| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|,$$

则 l^∞ 是赋范线性空间.

例 3.3 在线性空间$\mathbb{C}^n$(或$\mathbb{R}^n$)上,对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{C}^n$(或$\mathbb{R}^n$),若定义

$$\| x \|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|,$$

$$\| x \|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}},$$

(特别地,当 $p=1$ 时 $\| x \|_1=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$;当 $p=2$ 时 $\| x \|_2=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$,)则($\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_\infty$)和($\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_p$)(或($\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_\infty$)和($\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_p$))都是赋范线性空间.

此例表明,在同一个线性空间上可以赋予不同的范数,成为不同的赋范线性空间.通常把($\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_2$)(或($\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_2$))简记为$\mathbb{C}^n$(或$\mathbb{R}^n$).

例 3.4 在线性空间 $C[a,b]$上,对于任意 $x\in C[a,b]$,通常定义

$$\| x \| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|,$$

则 $C[a,b]$是赋范线性空间.若定义

$$\|x\|_1=\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t,$$

或

$$\|x\|_2=\left(\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

则$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$和$(C[a,b],\|\cdot\|_2)$都是赋范线性空间.

例 3.5 在线性空间$\mathbb{C}^{n\times n}$上,对于任意方阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,若定义

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|,$$

则$(\mathbb{C}^{n\times n},\|\cdot\|_\infty)$是赋范线性空间.

关于赋范线性空间与内积空间的关系,前面已经指出,任何内积空间(关于由内积导出的范数)都是赋范线性空间.反过来的问题是:对于任何赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$,是否存在一个 X 上的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$使得 X 中的每一个元素 x 的范数 $\|x\|$ 都是由内积导出的范数,即$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$? 回答是否定的.事实上,下面的例子表明,确有很多的赋范线性空间,其范数不是由内积导出的.因为引理 1.4 指出,内积空间 X 中由内积导出的范数必须满足平行四边形公式:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

其中 $x,y\in X$.因此,如果某个赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$不满足平行四边形公式,则此范数就不是由内积导出的.

例 3.6 赋范线性空间$l^p(1\leqslant p<\infty)$,当 $p\neq2$ 时 l^p 的范数不是由内积导出的.事实上,取

$$x_0=(1,1,0,0,\cdots),\ y_0=(1,-1,0,0,\cdots)\in l^p,$$

则$\|x_0\|=\|y_0\|=2^{\frac{1}{p}}$,但$\|x_0+y_0\|=\|x_0-y_0\|=2$.显然 x_0 和 y_0 不满足平行四边形公式.

因此,赋范线性空间是比内积空间更为广泛的一类空间.

二、由范数导出的度量

在$\mathbb{R}^2$中，任意两点$x=(\xi_1,\xi_2)$和$y=(\eta_1,\eta_2)$的距离$d(x,y)$可以表示为二向量x和y之差的范数$\|x-y\|$，即

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= ((\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

其直观含义从图 3-2 中可以看出.

依此方法，可类似地在一般的赋范线性空间中定义任意两点的距离.

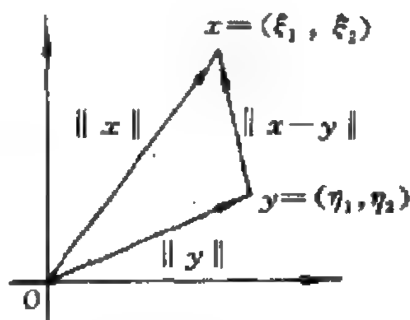

图 3-2

定义 3.2 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间，对于任意$x,y\in X$，令

$$d(x,y)=\|x-y\|,$$

则d是一个$X\times X$到$[0,+\infty)$的映射，d称为赋范线性空间X上由**范数导出的度量**(或称为距离函数)，$d(x,y)$称为点x与y的距离.

容易验证由范数导出的度量对任意$x,y,z\in X$满足以下条件：

(1) $d(x,y)\geqslant 0$，并且$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$，

(2) $d(x,y)=d(y,x)$，

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+(d(z,y)$.

例如：由范数的三角不等式，得到

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\| \\ &= d(x,z)+d(z,y), \end{aligned}$$

即条件(3)成立.

此外，由范数导出的度量还具有如下特殊的性质.

引理 3.1 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间，d是由范数导出的度量，则对于任意$x,y,z\in X$及任意$\alpha\in\mathbb{K}$，下列结论成立：

(1) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$,

(2) $d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y)$.

证明 由于 $d(x,y)=\|x-y\|$,则

$$d(x+z,y+z)=\|(x+z)-(y+z)\|$$
$$=\|x-y\|=d(x,y),$$

并且

$$d(\alpha x,\alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=|\alpha|\,\|x-y\|$$
$$=|\alpha|d(x,y).$$

证毕.

定义 3.3 设 X 是赋范线性空间,A 和 B 是 X 的非空子集,$x\in X$,d 是 X 上由范数导出的度量,记

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$
$$=\inf\{\|x-y\|\mid x\in A,y\in B\}.$$

$d(A,B)$称为 A 与 B 的**距离**.

单元素集$\{x_0\}$与 B 的距离称为点 x_0 与集 B 的距离,记为 $d(x_0,B)$,即

$$d(x_0,B)=d(\{x_0\},B)=\inf\{\|x_0-y\|\mid y\in B\}.$$

记

$$\delta(A)=\sup\{\|x-y\|\mid x,y\in A\}.$$

$\delta(A)$称为集 A 的**直径**. 若 $\delta(A)<+\infty$,则 A 称为是**有界的**. 否则,A 称为是无界的.

引理 3.2 设 X 是赋范线性空间,$A\subset X$. 则 A 是有界的当且仅当存在 $r>0$ 使得对一切 $x\in A$ 都有

$$\|x\|<r.$$

证明 若 A 是有界的,即 $\delta(A)<+\infty$,取定一点 $x_0\in A$,令 $r=\delta(A)+\|x_0\|+1$,则对一切 $x\in A$ 都有

$$\|x\|\leqslant\|x-x_0\|+\|x_0\|$$
$$\leqslant\delta(A)+\|x_0\|<r.$$

反过来,若存在 $r>0$ 使得对一切 $x\in A$ 都有 $\|x\|<r$,则对任

意 $x,y\in A$ 有

$$\|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\| < r + r = 2r.$$

取上确界，则得到 $\delta(A)\leqslant 2r$. 证毕.

三、收敛序列与连续映射

$\mathbb{R}$ 中的数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 是指：若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对一切 $n>N$ 都有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a|=0$.

由于赋范线性空间中由范数可以导出度量，因此，很自然地可以把实数列收敛的定义推广到一般的赋范线性空间.

定义 3.4 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中的序列. 若存在 $x\in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，即对于任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得对一切 $n>N$ 都有

$$\|x_n-x\|<\varepsilon,$$

则称序列 $\{x_n\}$ **依范数收敛于** x，x 称为序列 $\{x_n\}$ 的**极限**，记为 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，或简记为 $x_n\to x$.

在内积空间 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 是指此序列依由内积导出的范数收敛于 x.

在赋范线性空间 X 中，有限多个元素的和仍然是 X 的元素. 但是 X 中可数多个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 的和是否是 X 的元素呢？从形式上可记

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x_n.$$

上式可能有意义，也可能没有意义. 类似于微积分中无穷级数的定义，在赋范线性空间中可以作如下定义.

定义 3.5 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的一列元素. 作部分

和序列$\{s_n\}$，其中

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (n\in N).$$

若序列$\{s_n\}$是收敛的，即存在$s\in X$，使得

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$称为是**收敛**的，s称为$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$的和，记为

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}x_n.$$

若$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$是收敛的，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$称为是**绝对收敛**的.

值得注意的是，在赋范线性空间X中，绝对收敛的级数不一定是收敛的．要保证X中每一个绝对收敛的级数都是收敛的，可见后面的定理3.5.

级数的收敛相当于其部分和序列的收敛.收敛序列有如下性质.

引理3.3 若$\{x_n\}$是赋范线性空间X中的收敛序列，则

(1) $\{x_n\}$是有界的；

(2) $\{x_n\}$的极限是唯一的.

证明 (1) 设$x_n\to x$. 取$\varepsilon=1$，则存在正整数N使得对一切$n>N$有

$$\|x_n-x\|<1.$$

令$c=1+\max\{\|x_1-x\|,\cdots,\|x_N-x\|,1\}$，则对一切$n\in N$都有

$$\|x_n-x\|<c.$$

由引理3.2，$\{x_n\}$是有界的.

(2) 若$x_n\to x$且又有$x_n\to y$，由于

$$\|x-y\| \leqslant \|x-x_n\| + \|x_n-y\| \to 0,$$

则 $\|x-y\|=0$,从而 $x=y$. 证毕.

下面,作为一个具体的例子,讨论实值连续函数空间 $C[a,b]$ 中序列收敛的含义. 例子中用到函数列"一致收敛"的术语. 对于不熟悉此术语的读者,可阅读本节末尾的附录.

例 3.7 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的序列. $C[a,b]$ 中的范数通常指最大值范数,即对于 $x\in C[a,b]$,

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|.$$

则 $C[a,b]$ 中的序列 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x 当且仅当闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

证明 若 $C[a,b]$ 中的序列 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x,则对于任意 $\varepsilon>0$ 存在 $N\in\mathbb{N}$,使得对一切 $n>N$ 都有

$$\|x_n-x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)| < \varepsilon,$$

从而对一切 $n>N$ 及任意 $t\in[a,b]$ 都有

$$|x_n(t)-x(t)| < \varepsilon.$$

这表明,连续函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

反之,若连续函数列 $\{x(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$,则可得到 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续的结论,即 $x\in C[a,b]$. 事实上,由一致收敛性,对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbb{N}$,使得对一切 $n>N$ 及任意 $t\in[a,b]$ 都有

$$|x_n(t)-x(t)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

选定一个大于 N 的 n,由于 $x_n(t)$ 连续,则存在 $\delta>0$ 使得当 $|t-t'|<\delta$ 时有

$$|x_n(t')-x_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$|x(t')-x(t)| \leqslant |x(t')-x_n(t')| + |x_n(t')-x_n(t)| + |x_n(t)-x(t)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

这表明 $x(t)$ 在任意 $t \in [a,b]$ 处连续，即 $x \in C[a,b]$.

再由(3.1)式可得到，对一切 $n > N$

$$\| x_n - x \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} | x_n(t) - x(t) | < \varepsilon.$$

这表明 $C[a,b]$ 中的序列 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x. 证毕.

下面研究两个赋范线性空间之间的连续映射.

定义 3.6 设 f 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的映射.

(1) 取 $x_0 \in X$，若对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 X 中所有满足 $\| x - x_0 \| < \delta$ 的 x，有

$$\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon,$$

则称 **f 在点 x_0 连续**.

(2) 若 f 在 X 的每一点都连续，则称 **f 在 X 上连续**.

为了证明映射的连续性，常常用到下面的等价条件.

定理 3.1 设 f 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的映射，则 f 在点 $x_0 \in X$ 连续，当且仅当对于 X 中任意序列 $\{x_n\}$，若在 X 中 $x_n \to x_0$，则在 Y 中 $f(x_n) \to f(x_0)$.

证明 必要性. 若 f 在点 x_0 连续，由定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 X 中所有满足 $\| x - x_0 \| < \delta$ 的 x，有

$$\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon.$$

若 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x_n \to x_0$，则存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对一切 $n > N$，有 $\| x_n - x_0 \| < \delta$，从而对一切 $n > N$

$$\| f(x_n) - f(x_0) \| < \varepsilon.$$

因此，在 Y 中 $f(x_n) \to f(x_0)$.

充分性. 假若 f 在点 x_0 不连续，则存在 $\varepsilon > 0$，使得对每一个 $\delta > 0$ 有一个 $x_\delta \in X$，满足

$$\| x_\delta - x_0 \| < \delta, \text{但} \ \| f(x_\delta) - f(x_0) \| \geqslant \varepsilon.$$

特别地，取$\delta=\frac{1}{n}$，则有$x_n\in X$，满足

$$\|x_n-x_0\|<\frac{1}{n}, \text{但} \|f(x_n)-f(x_0)\|\geqslant\varepsilon.$$

可见，$\{x_n\}$是X中的序列且$x_n\to x_0$，但序列$\{f(x_n)\}$不收敛于$f(x_0)$. 此与假设条件矛盾. 证毕.

应用此定理，可以得到赋范线性空间中范数的连续性，线性运算的连续性，以及内积空间中内积的连续性等结论. 为此，需要如下准备工作.

在赋范线性空间X中，对于任意$x,y\in X$，不等式

$$|\|y\|-\|x\||\leqslant\|y-x\| \tag{3.2}$$

成立. 事实上，由三角不等式$\|y\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|$，得到

$$\|y\|-\|x\|\leqslant\|y-x\|. \tag{3.3}$$

另一方面，再应用三角不等式$\|x\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|$，得到

$$\|x\|-\|y\|\leqslant\|y-x\|. \tag{3.4}$$

因此，由不等式(3.3)和(3.4)立即得到不等式(3.2).

在$\mathbb{R}^2$中，不等式(3.2)的几何意义，正是"三角形两边之差小于第三边"这一几何原理.

应用定理3.1及不等式(3.2)可推出下面的定理.

定理3.2 范数是连续的，即赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$中的范数$\|\cdot\|$是X到$\mathbb{R}$的连续映射.

证明 对于任意$x\in X$和X中任意序列$\{x_n\}$，若$x_n\to x$，由不等式(3.2)得

$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|\to 0 \quad (n\to\infty),$$

则$\|x_n\|\to\|x\|$. 证毕.

定理3.3 在赋范线性空间X中，线性运算是连续的.

证明 对于任意$x,y\in X$以及X中任意序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，若$x_n\to x$且$y_n\to y$，则当$n\to\infty$时

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0.$$

这表明 $x_n+y_n\to x+y$，即加法运算"+"是连续的. 同样可证明数乘运算也是连续的. 证毕.

定理 3.4 在内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中，内积是连续的，即对于 X 中任意序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，若 $x_n\to x$ 且 $y_n\to y$，则 $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$.

证明 由 Schwarz 不等式

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| &\leqslant |\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y_n\rangle|+|\langle x,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| \\
&=|\langle x_n-x,y_n\rangle|+|\langle x,y_n-y\rangle| \\
&\leqslant \|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\|.
\end{aligned}
$$

由于 $y_n\to y$，则 $\{\|y_n\|\}$ 是有界的. 故由条件 $x_n\to x$ 和 $y_n\to y$ 得到上面不等式的右端趋于 0，从而

$$|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|\to 0.$$

证毕.

赋范线性空间具有线性结构和范数. 因此，两个赋范线性空间的同构可作如下定义.

定义 3.7 设 X 和 Y 是在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间，$T: X\to Y$ 是映射. 若 T 既是双射又是线性算子，且保持范数，即对每一个 $x\in X$

$$\|Tx\|=\|x\|,$$

则 T 称为 X 到 Y 上的**等距同构映射**.

若存在一个 X 到 Y 上的等距同构映射，则 X 和 Y 称为是**等距同构**的.

两个等距同构的赋范线性空间 X 和 Y 在等距同构的意义下，可以看作是同一的，因此在此意义下，可以记为 $X=Y$.

四、Cauchy 序列与 Banach 空间

定义 3.8 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的序列. 若对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得对一切 $m,n>N$，有

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon,$$

则序列 $\{x_n\}$ 称为 X 中的 **Cauchy 序列**，或称为基本序列.

引理 3.4 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的序列.

(1) 若$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，则$\{x_n\}$是有界的.

(2) 若 Cauchy 序列$\{x_n\}$有一个子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于 x，则序列$\{x_n\}$也收敛于 x.

(3) 若$\{x_n\}$是收敛序列，则$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，但逆命题不真.

证明 (1) 留作习题.

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，因 $x_{n_k}\to x$，故存在 $N_1\in\mathbb{N}$，使得对一切 $n_k>N_1$ 恒有

$$\| x_{n_k}-x \| <\frac{\varepsilon}{2};$$

又由于$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，故存在 $N_2\in\mathbb{N}$，使得对一切 $m,n>N_2$ 恒有

$$\| x_m-x_n \| <\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则对一切 $n>N$ 及任取的 $n_k>N$ 有

$$\begin{aligned}\| x_n-x \| &\leqslant \| x_n-x_{n_k} \| + \| x_{n_k}-x \| \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

(3) 若 $x_n\to x$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，使得对一切 $m,n>N$，恒有

$$\| x_m-x \| <\frac{\varepsilon}{2},\quad \| x_n-x \| <\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\| x_m-x_m \| \leqslant \| x_m-x \| + \| x_n-x \| <\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故$\{x_n\}$是 Cauchy 序列.

为证明逆命题不真，我们考察下面的例子：

令 $X=\{x|x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，其中仅有有限个 ξ_i 不为零$\}$. 按通

常序列的加法和数乘，X 成为线性空间. 对任意 $x\in X$，范数定义为

$$\|x\| = \max_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|,$$

则 X 是赋范线性空间. 设 $x_n=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots)$，则 $\{x_n\}$ 显然是 X 中的 Cauchy 序列，但它在 X 中不收敛. 证毕.

定义 3.9 若赋范线性空间 X 中每一个 Cauchy 序列都收敛，则称 X 是**完备的**. 完备的赋范线性空间通常又称为 **Banach 空间**.

若内积空间 X 关于由内积导出的范数是完备的赋范线性空间，则称 X 是 **Hilbert 空间**.

例 3.8 空间$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$都是完备的.

证明 先证任何实数列必有单调的子列.

设有实数列 $\{x_n\}$，记 $E_p=\{x_p,x_{p+1},\cdots\}$，$p=1,2,\cdots$. 当每个集合 E_p 都有最大值时，选取

$$x_{n_1}=\max E_1, x_{n_2}=\max E_{n_1+1},\cdots,x_{n_{k+1}}=\max E_{n_k+1},\cdots.$$

显然 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个单调减少的子数列. 当存在某个 $E_p=\{x_p,x_{p+1},\cdots\}$ 无最大值时，则对任意 $m>p$，E_m 也无最大值. 此时，选取 $x_{n_1}=x_p$；于是 $\{x_{p+1},x_{p+2},\cdots\}$ 中必有一个大于 x_p，取其为 x_{n_2}；而在 $\{x_{n_2+1},x_{n_2+2},\cdots\}$ 中必有一个大于 x_{n_2}，取其为 x_{n_3}. 假定已选取 $x_{n_1}<x_{n_2}<\cdots<x_{n_k}$，则在 $\{x_{n_k+1},x_{n_k+2},\cdots\}$ 中仍有某一个大于 x_{n_k}，取其为 $x_{n_{k+1}}$，如此继续下去，便得到 $\{x_n\}$ 的一个单调增的子列 $\{x_{n_k}\}$.

再证$\mathbb{R}$ 中的任何 Cauchy 数列 $\{x_n\}$ 都是收敛的(此即 Cauchy 收敛准则).

由引理 3.4(1)，$\{x_n\}$ 是有界的，故有一个单调有界的子列 $\{x_{n_k}\}$. 由单调有界准则知 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 再由引理 3.4(2)知 $\{x_n\}$ 收敛.

因此$\mathbb{R}$ 是完备的. 由$\mathbb{R}$ 的完备性，易证$\mathbb{C}$ 是完备的. 证毕.

下面讨论以前列举过的一些空间的完备性.

例 3.9　$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{C}^n$. 若任一元素 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$ 的范数定义为

$$\|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

则$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{C}^n$ 都是 Banach 空间. 因此,$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{C}^n$ 按照例 1.21 中定义的内积是 Hilbert 空间.

证明　先证明$\mathbb{R}^n$ 是完备的. 设$\{x_k\}$是$\mathbb{R}^n$ 中任意 Cauchy 序列, $x_k=(\xi_1^{(k)},\cdots,\cdots,\xi_n^{(k)})^T$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 $k,m>N$,有

$$\|x_k-x_m\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon. \tag{3.5}$$

于是,对每一个 $i(i=1,\cdots,n)$有

$$|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon.$$

这表明, 对每一个 $i(i=1,\cdots,n)$, $\{\xi_i^{(k)}\}$是$\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 序列. 由于$\mathbb{R}$ 的完备性,可设当 $k\to\infty$时

$$\xi_i^{(k)}\to\xi_i \qquad (i=1,\cdots,n).$$

令 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$,则 $x\in\mathbb{R}^n$,并且由(3.5)式,令 $m\to\infty$得到

$$\|x_k-x\|\leqslant\varepsilon,$$

即 $x_k\to x$ $(k\to\infty)$. 所以$\mathbb{R}^n$ 是完备的.

将$\mathbb{C}^n$ 中的每一个元素的坐标分为实部和虚部,可以用上面相同的方法证明$\mathbb{C}^n$ 是完备的.

同样可以证明,$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{C}^n$ 按如下定义的范数

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|,$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|,$$

也都是 Banach 空间.

例 3.10　$l^p(1\leqslant p<\infty)$. 若任一元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$ 的范数定义为

$$\|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

则 l^p 是 Banach 空间. 因此,l^2 按例 1.22 中定义的内积是 Hilbert 空间.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 l^p 中任意 Canchy 序列,$x=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)$,则对于任意 $\varepsilon<0$,存在正整数 N,使得对一切 $m,n>N$,有

$$\| x_m - x_n \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \qquad (3.6)$$

于是,对每一个 $i\in N$ 有

$$|\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}| < \varepsilon.$$

这表明,对每一个 $i\in N$,$\{\xi_i^{(n)}\}$ 是 R(或 C)中的 Cauchy 序列. 由于 R(或 C)的完备性,可设当 $n\to\infty$ 时

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i \qquad (i \in N).$$

令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$,现在证明 $x\in l^p$ 且 $x_n\to x$. 事实上,由(3.6)式,对一切 $m,n>N$ 和 $k\in N$,有

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p.$$

令 $m\to\infty$,得到

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p \leqslant \varepsilon^p$$

对一切 $n>N$ 和 $k\in N$ 成立. 再令 $k\to\infty$,得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p \leqslant \varepsilon^p. \qquad (3.7)$$

这表明 $x-x_n=(\xi_1-\xi_1^{(n)},\xi_2-\xi_2^{(n)},\cdots)\in l^p$. 又因 $x_n\in l^p$,故 $x=x_n+(x-x_n)\in l^p$. 同时,(3.7)式表明 $x_n\to x$.

例 3.11 $C[a,b]$. 若任一元素 $x\in[a,b]$的范数定义为

$$\| x \| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|,$$

则 $C[a,b]$是 Banach 空间.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中任意 Cauchy 序列,则对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 $m,n>N$,有

$$\| x_m - x_n \| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon.$$

于是，对每一点 $t\in[a,b]$ 有

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon. \tag{3.8}$$

这表明，对每一点 $t\in[a,b]$，$\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$)中的 Cauchy 序列. 由于$\mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$)的完备性，可设当 $n\to\infty$ 时

$$x_n(t)\to x(t).$$

当 t 在$[a,b]$上变动时，就得到一个定义在$[a,b]$上的函数 $x(t)$. 现在证明 $x\in C[a,b]$ 且 $x_n\to x$. 事实上，在(3.8)式中令 $m\to\infty$，得到

$$|x(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon$$

对一切 $n>N$ 和 $t\in[a,b]$成立. 因此，$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$，并且 $x(t)$是$[a,b]$上的连续函数. 由例 3.7 知，$x_n\to x$.

例 3.12 l^∞. 若任一元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$ 的范数定义为

$$\|x\|=\sup_{i\in N}|\xi_i|,$$

则 l^∞ 是 Banach 空间.（证明与上面各例类似，留给读者.）

下面给出两个不完备的赋范线性空间的例子.

例 3.13 若 $C[a,b]$中任一元素 x 的范数定义为

$$\|x\|_1=\int_0^1|x(t)|\mathrm{d}t,$$

则赋范线性空间$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$是不完备的.

证明 对每一个 $n\in N$，在$[0,1]$上定义函数

$$x_n(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t\in[0,\frac{1}{2})\\ (n+1)t-\frac{n+1}{2} & \text{当 } t\in[\frac{1}{2},a_n]\\ 1 & \text{当 } t\in(a_n,1]\end{cases},$$

这里 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}$. 从图 3-3 中可以看出，每一个 $x_n\in C[0,1]$并且 $\|x_m-x_n\|$ 等于图中三角形的面积，当 $m,n>\frac{1}{\varepsilon}$时

$$\|x_m-x_n\|<\varepsilon.$$

因此，$\{x_n\}$是$(C[0,1],\|\cdot\|_1)$中的 Cauchy 序列.

现在证明$\{x_n\}$不收敛，因此$(C[0,1],\|\cdot\|_1)$是不完备的. 事实上，假若 $x_n\to x\in C[0,1]$，则

$$
\begin{aligned}
\|x_n-x\| &= \int_0^1 |x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{a_n}^1 |1-x(t)|\mathrm{d}t \to 0 \qquad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

由于上式中的三个积分都是非负的，则这三个积分必分别趋于 0（当 $n\to\infty$时），因此得到

$$
x(t)=\begin{cases} 0 & \text{当 } t\in[0,\frac{1}{2}) \\ 1 & \text{当 } t\in(\frac{1}{2},1] \end{cases}
$$

此与 $x(t)$在$[0,1]$上连续相矛盾. 故$\{x_n\}$不收敛.

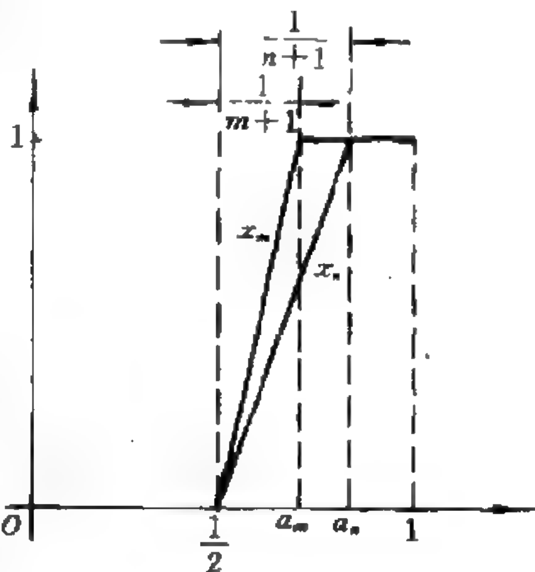

图 3-3

例 3.14 $P[0,1]$表示闭区间$[0,1]$上的多项式的全体. 按照通常函数的加法和数乘，$P[0,1]$构成一个线性空间. 若任一元素$x\in P[0,1]$的范数定义为

$$\|x\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

则赋范线性空间 $P[0,1]$是不完备的.

证明 对于每一点 $t\in[0,1]$，令

$$x_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{t^i}{i!} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

$$x(t)=\mathrm{e}^t.$$

注意到 $e^t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}$，易见$\{x_n\}$是 $P[0,1]$中的 Cauchy 序列，但是$\{x_n\}$在 $P[0,1]$中不收敛.

在泛函分析中，有很多基本定理都要求空间完备的条件.这里，对于前面提到的一个问题作一证明.

定理 3.5　设 X 是赋范线性空间. X 中每一个绝对收敛的级数都是收敛的当且仅当 X 是完备的.

证明　充分性. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是 X 中任一绝对收敛的级数，它的部分和序列为$\{s_n\}$，其中

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (n \in N).$$

对于任意正整数 m,k(不妨设 $m<k$)，有

$$\begin{aligned} \| s_m - s_k \| &= \| x_{m+1} + \cdots + x_k \| \\ &\leqslant \| x_{m+1} \| + \cdots + \| x_k \|, \end{aligned}$$

故$\{s_n\}$是 Cauchy 序列. 由 X 的完备性，则存在 $s_0 \in X$ 使得 $s_n \to s_0$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s_0$.

必要性. 若$\{s_n\}$是 X 中任一 Cauchy 序列，则对每一个 $k \in N$，存在 $n_k \in N$，使得对一切 $m,n \geqslant n_k$，有

$$\| s_m - s_n \| < 2^{-k}.$$

对于各个选取的 n_k，可进一步要求满足

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots.$$

这样，得到$\{s_n\}$的一个子序列$\{s_{n_k}\}$. 令

$$x_1 = s_{n_1},\ x_2 = s_{n_2} - s_{n_1}, \cdots,$$

$$x_k = s_{n_k} - s_{n_{k-1}}, \cdots,$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \leqslant \| s_{n_1} \| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \| s_{n_1} \| + 1.$$

这表明，$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 绝对收敛. 由假设条件，得到 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛，即存在 $s \in X$ 使得

$$s_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} x_i \to s \qquad (k \to \infty).$$

因此，Cauchy 序列 $\{s_n\}$ 有一个收敛的子序列 $\{s_{n_k}\}$. 应用引理 3.4(2)，$\{s_n\}$ 也收敛于 s. X 的完备性得证.

五、等价范数

在线性空间上一般可以赋予不同的范数. 下面介绍在同一线性空间上两个范数等价的概念.

定义 3.10 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数. 若存在正数 a 和 b，使得对于每一个 $x \in X$ 都有

$$a\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b\|x\|_2,$$

则范数 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 称为是**等价**的.

容易看出，若线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的，则 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_1$ 也是等价的.

若线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的，则不难证明(留作习题)：

(1) $\{x_n\}$ 是 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中的 Cauchy 序列，当且仅当 $\{x_n\}$ 是 $(X, \|\cdot\|_2)$ 中的 Cauchy 序列；

(2) 序列 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛于 x，当且仅当 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|_2$ 收敛于 x；

(3) 由(1)和(2)立即可得到，$(X, \|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间，当且仅当 $(X, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间.

在 §3.7 中，将证明下面一个结论(见定理 3.30)：

有限维线性空间上任何两个范数都是等价的.

六、子空间

定义 3.11 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，Y 是 X 的线性子

空间.若对于 Y 中任意元素 y 的范数定义为 y 作为 X 中的元素的范数 $\|y\|$,则 Y 本身也成为一个赋范线性空间.此空间 Y 称为赋范线性空间 X 的**子空间**.

由此定义,赋范线性空间 X 的任意一个线性子空间,按照 X 中定义的范数,皆可成为赋范线性空间 X 的子空间.

关于内积空间的子空间,已在§1.3中介绍过(见定义1.21).

应当注意,Banach 空间 X 的子空间是指 X 作为赋范线性空间的子空间.因此,Banach 空间的子空间不一定是 Banach 空间.同样,Hilbert 空间的子空间也不一定是 Hilbert 空间.

例如,在例3.14中,$P[a,b]$实际上是 Banach 空间 $C[a,b]$的子空间,但是 $P[a,b]$不是 Banach 空间.

稍后,在§3.2中将给出一个完备空间的子空间是完备空间的充分必要条件(见定理3.9).

附录　函数列的一致收敛

设 $E\subset\mathbb{R}$,f 是 E 到$\mathbb{R}$ 的映射,或称为 E 上的函数,须说明,用"f"表示 E 上的函数与习惯记法"$f(x)$ $(x\in E)$"或简记为"$f(x)$"是一致的.

首先,回顾一下函数列处处收敛的定义.

设$\{f_n(x)\}$是定义在 $E\subset\mathbb{R}$ 上的函数列,若存在 E 上的函数$f(x)$,对于任意 $x_0\in E$,任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切$n>N$,有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon, \tag{3.9}$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在 E 上**处处收敛于** $f(x)$.

一般说来,在上述定义中的 N 不仅与 ε 有关而且与 x_0 有关.如果对于 $\varepsilon>0$,能找到一个正整数 N,适用于一切 E 中的点 x(即仅与 ε 有关而与 x 无关的 N),使得(3.9)式对一切 $n>N$ 成立,那么就得到下面关于函数列一致收敛的定义.

定义 3.12　设 $E\subset\mathbb{R}$,$\{f_n(x)\}$是定义在 E 上的函数列,若存在 E 上的函数 $f(x)$,对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 $n>N$ 及一切 $x\in E$,皆

有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上**一致收敛于** $f(x)$.

显然，$\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ 必然处处收敛于 $f(x)$. 但是其逆不成立.

如图 3-4，$\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，在几何上表示：当 $n>N$ 时，函数 $y=f_n(x)$ 的图形完全落在二曲线 $y=f(x)-\varepsilon$ 与 $y=f(x)+\varepsilon$ 为界的带形区域内.

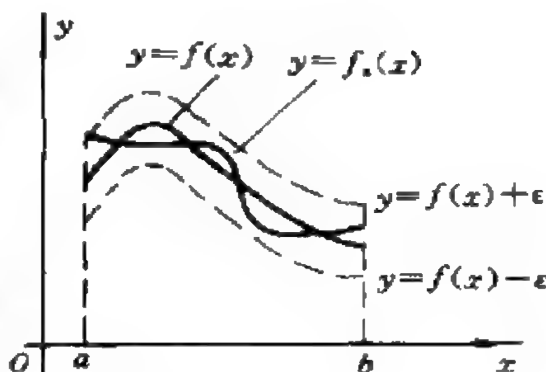

图 3-4

§ 3.2 赋范线性空间中的点集

赋范线性空间中的元素也常称为点或向量. 本节将要介绍的赋范线性空间中的开集、闭集和闭包等概念都可以在数直线 $\mathbb{R}$（或 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$）中找到它们的模型. 这样，可以借助于实际的模型帮助我们理解一般赋范线性空间中这些点集的性质. 此外，在本节中还将介绍空间中的稠密集和可分空间等基本概念.

一、开集和闭集

定义 3.13 设 X 是赋范线性空间，$x_0\in X$，$r>0$. 记

$$B(x_0,r)=\{x\in X\mid \|x-x_0\|<r\},$$

$$\widetilde{B}(x_0,r)=\{x\in X\mid \|x-x_0\|\leqslant r\},$$

$$S(x_0,r)=\{x\in X\mid \|x-x_0\|=r\}.$$

$B(x_0,r)$ 称为以 x_0 为中心 r 为半径的**开球**；$\widetilde{B}(x_0,r)$ 称为以 x_0 为中心 r 为半径的**闭球**；$S(x_0,r)$ 称为以 x_0 为中心 r 为半径的**球面**.

为了对不同的赋范线性空间的开球有一个直观的认识，下举二例.

例 3.15 在$\mathbb{R}^2$中，若对于任一$x=(\xi_1,\xi_2)^T\in\mathbb{R}^2$，定义范数分别为

$$\|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|,$$

$$\|x\|_2=(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_\infty=\max(|\xi_1|,|\xi_2|).$$

在$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$，$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$和$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$中以原点为中心的单位开球分别记为$B_1(0,1)$，$B_2(0,1)$和$B_\infty(0,1)$. 这三个单位开球分别为如图 3-5 中所围的区域.

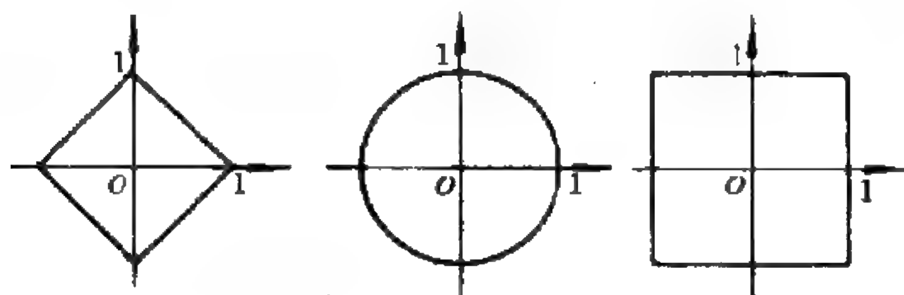

图 3-5

例 3.16 在实连续函数空间$C[a,b]$中，任一$x\in C[a,b]$的范数

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|.$$

如图 3-6，以x为中心r为半径的开球$B(x,r)$是图中以二曲线$s=x(t)-r$与$s=x(t)+r$为界的带形区域.

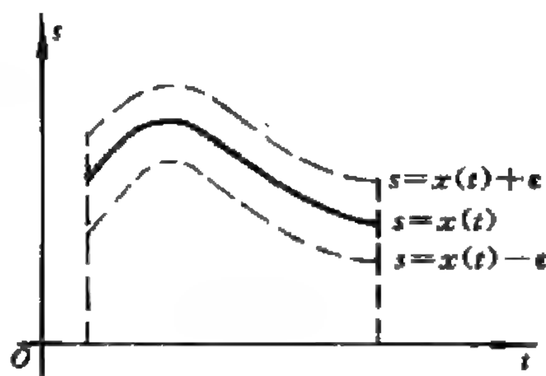

图 3-6

定义 3.14 设G和F是赋范线性空间X中的两个集合.

(1) 若对于每一点$x\in G$，存在$r>0$使得$B(x,r)\subset G$，则G称

为 X **中的开集**.

(2) 若 F 的余集 F^C 是 X 中的开集,则 F 称为 X **中的闭集**.

由定义,空集$\varnothing$可以认为是开集,全空间 X 显然是开集,从而$\varnothing$和 X 也都是闭集.

开球是开集,闭球是闭集.事实上,若 $y\in B(x,r)$,则 $\|y-x\|<r$.令 $r_0=r-\|y-x\|$.对于任意 $z\in B(y,r_0)$,由三角不等式

$$\|z-x\|\leqslant\|z-y\|+\|y-x\|<r_0+\|y-x\|=r,$$

故 $z\in B(x,r)$.因此 $B(y,r_0)\subset B(x,r)$.$B(x,r)$是开集得证.

又若 $y\in(\widetilde{B}(x,r))^C$,则 $\|y-x\|>r$.令 $r_1=\|y-x\|-r$.对于任意 $z\in B(y,r_1)$,由

$$\|z-x\|\geqslant\|y-x\|-\|z-y\|>\|y-x\|-r_1=r,$$

故 $z\in(\widetilde{B}(x,r))^C$.因此,$B(y,r_1)\subset(\widetilde{B}(x,r))^C$.这表明$(\widetilde{B}(x,r))^C$是开集,从而 $\widetilde{B}(x,r)$是闭集.

开集和闭集具有如下性质.

定理 3.6 在赋范线性空间 X 中,

(1) 任意多个开集的并是开集;

(2) 有限多个开集的交是开集;

(3) 任意多个闭集的交是闭集;

(4) 有限多个闭集的并是闭集.

证明 (1) 设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$是一开集族,$G=\bigcup\limits_{\alpha\in D}G_\alpha$.若 $x\in G$,则存在$\alpha\in D$,使得 $x\in G_\alpha$,于是存在 $r>0$,使得 $B(x,r)\subset G_\alpha\subset G$.因此 G 是开集.

(2) 仅就两个开集的情况证明,然后应用归纳法即可得证.设 A_1 和 A_2 是开集.若 $x\in A_1\cap A_2$,则存在 $r_1>0$ 和 $r_2>0$,使得 $B(x,r_1)\subset A_1$ 及 $B(x,r_2)\subset A_2$.取 $r=\min\{r_1,r_2\}$,则 $B(x,r)\subset A_1\cap A_2$.因此 $A_1\cap A_2$ 是开集.

(3)和(4)应用 de Morgan 公式(定理 1.2)可立即得证.

需要指出,无限多个开集的交不一定是开集,无限多个闭集的

并不一定是闭集. 例如在$\mathbb{R}$中

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=[0,1] \text{ 不是开集},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(-1,1) \text{ 不是闭集}.$$

二、集合的闭包

定义 3.15 设 A 是赋范线性空间 X 中的集合,$x\in A$. 若对于每一个 $r>0$ 都有

$$A\cap B(x,r)\neq\varnothing$$

(即 $B(x,r)$中含有 A 的元素,)则 x 称为集 A 的**接触点**. A 的所有接触点组成的集合称为集合 A 的**闭包**,记为 $\overline{A}$.

集合的闭包具有如下性质.

定理 3.7 设 A 和 B 是赋范线性空间 X 中的两个集合,则下列各条成立.

(1) $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集,即

$\overline{A}=\bigcap\{F\,|\,F \text{ 是闭集且 } A\subset F\}$;

(2) A 是闭集当且仅当 $A=\overline{A}$;

(3) 若 $A\subset B$,则 $\overline{A}\subset\overline{B}$;

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(5) $x\in\overline{A}$ 当且仅当 $d(x,A)=0$(这里 d 是由 X 上的范数导出的度量).

证明 (1) 先证 $\overline{A}$ 是闭集. 只要证 $\overline{A}^c$ 是开集. 对于任意 $x\in\overline{A}^c$,则 $x\notin\overline{A}$,即存在 $r>0$ 使得

$$B(x,r)\cap A=\varnothing.$$

现在只要证明 $B(x,r)\subset\overline{A}^c$,从而 $\overline{A}^c$ 是开集便可得证. 事实上,对任意 $y\in B(x,r)$,由于开球是开集,故存在 $r_1>0$ 使得 $B(y,r_1)\subset B(x,r)$. 由此式推得 $B(y,r_1)\cap A=\varnothing$,故 $y\notin\overline{A}$. 即 $y\in\overline{A}^c$. 因此 $B(x,r)\subset\overline{A}^c$.

显然 $A\subset\overline{A}$. 设 F 是闭集且 $A\subset F$. 若 $x\notin F$，即 $x\in F^C$，则存在 $r>0$ 使得

$$B(x,r)\subset F^C\subset A^C,$$

于是 $B(x,r)\cap A=\varnothing$，故 $x\notin\overline{A}$. 因此 $\overline{A}\subset F$ 得证. 由 F 的任意性得知 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

(2) 必要性. 显然 $A\subset\overline{A}$. 另一方面，假设 A 是闭集，由(1)知 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集，故 $\overline{A}\subset A$. 因此 $A=\overline{A}$.

充分性由(1)立即得证.

(3) 由定义立即得证.

(4) 由于 $A\subset A\cup B$ 以及(3)得到 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$. 同理 $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. 因此 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. 另一方面，$\overline{A}\cup\overline{B}$ 是包含 $A\cup B$ 的闭集，而 $\overline{A\cup B}$是包含 $A\cup B$ 的最小闭集，故$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 因此$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 若 $x\in\overline{A}$，即对于每一个 $r>0$ 都有 $A\cap B(x,r)\neq\varnothing$，则

$$d(x,A)=\inf\{\|x-y\|\mid y\in A\}=0,$$

反之，若 $d(x,A)=0$，由下确界的定义，对任意 $r>0$ 皆存在 $y\in A$ 使得 $\|x-y\|<r$，则

$$y\in A\cap B(x,r)\neq\varnothing,$$

因此 $x\in\overline{A}$. 证毕.

注意，由于 $A\subset\overline{A}$ 是显然的，定理 3.7(2)可以叙述为：A 是闭集当且仅当 $\overline{A}\subset A$.

下面的定理表明，可以用序列的收敛性来刻划集合的闭包和闭集的特征.

定理 3.8 设 A 是赋范线性空间 X 中的集合.

(1) $x\in\overline{A}$ 的充分必要条件是，存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to x$；

(2) A 是闭集的充分必要条件是，对于 A 中任意序列 $\{x_n\}$，若 $x_n\to x$ 则 $x\in A$.

证明 (1) 若 $x\in\overline{A}$,则对每一个正整数 n,都有

$$x_n\in A\cap B(x,\frac{1}{n}).$$

由此可知 $\{x_n\}\subset A$,且 $x_n\to x$.

反之,若 A 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x,则对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 $n>N$,有

$$\|x_n-x\|<\varepsilon,\text{即 } x_n\in B(x,\varepsilon).$$

这表明 $A\cap B(x,\varepsilon)\neq\varnothing$,故 $x\in\overline{A}$.

(2) 设 A 是闭集. 对于 A 中任意序列 $\{x_n\}$,若 $x_n\to x$,则由(1)及定理 3.7(2)得到 $x\in\overline{A}=A$.

反之,欲证 A 是闭集,只要证明 $\overline{A}\subset A$. 事实上,对任意 $x\in\overline{A}$,由(1)知,存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to x$. 故由假设得到 $x\in A$,因此 $\overline{A}\subset A$. 证毕.

值得注意,定理 3.8 表明,所谓闭集就是说该集合中所有收敛序列的极限点都在此集合中,即对极限运算是封闭的. 此定理也提供了一种用收敛序列证明某一集合为闭集的方法.

定理 3.9 设 X 是 Banach 空间(或 Hilbert 空间),则 X 的子空间 A 是完备的当且仅当 A 是 X 中的闭集.

证明 必要性. 设 X 的子空间 A 是完备的. 要证 A 是 X 中的闭集,只要证明 $\overline{A}\subset A$. 任取 $x\in\overline{A}$,由定理 3.8(1),存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to x$. 由于收敛序列是 Cauchy 序列且 A 是完备的,故 $x\in A$.

充分性. 设 A 是 X 中的闭集,$\{x_n\}$ 是 A 中任意一个 Cauchy 序列,从而 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列,由假设 X 是完备的,则 $x_n\to x$. 再应用定理 3.8(2),得到 $x_n\to x\in A$. 因此,子空间 A 是完备的. 证毕.

三、稠密集与可分空间

定义 3.16 设 X 是赋范线性空间,$A\subset X$. 若 $\overline{A}=X$,则称 A

在 X 中**稠密**. 若 X 有一个可数稠密的子集(即存在一个可数集 $B\subset X$,使得 $\overline{B}=X$),则空间 X 称为是**可分**的.

由定义易知,A 在 X 中稠密,当且仅当对每一点 $x\in X$ 及每一个 $r>0$ 都有 $B(x,r)\cap A\neq\varnothing$.

数直线$\mathbb{R}$是可分的,因为全体有理数的集合$\mathbb{Q}$是可数的,并且对每一个 $x\in\mathbb{R}$ 及每一个 $r>0$,$B(x,r)=(x-r,x+r)$中含有有理数,即$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密.

同样可以证明,$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{C}^n$ 是可分的.

例 3.17 $C[a,b]$是可分的.

为了证明此结论,需要引用一个逼近理论中的重要定理,即 Weierstrass 定理.

Weierstrass 定理 若 $x\in C[a,b]$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在多项式 f,使得

$$\|x-f\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-f(t)|<\varepsilon.$$

证明略.

记 $P[a,b]$为$[a,b]$上多项式的全体组成的线性空间,它是$C[a,b]$的子空间. Weierstrass 定理表明,$P[a,b]$在 $C[a,b]$中稠密.

记 $P_0[a,b]$为$[a,b]$上有理系数多项式的全体组成的集合. 容易证明:

(1) $P_0[a,b]$是可数集;

(2) $P_0[a,b]$在$C[a,b]$中稠密. 事实上,对任意 $x\in C[a,b]$,由 Weierstrass 定理,对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $f\in P[a,b]$使得

$$\|x-f\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于有理数集$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密,故可以选取一个有理系数的多项式 $g\in P_0[a,b]$使得

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\| x-g \| \leqslant \| x-f \| + \| f-g \| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此 $C[a,b]$是可分的.

例 3.18 空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$是可分的.

证明 令 $A=\{y\in l^p \mid y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,0,0,\cdots),\eta_1,\cdots,\eta_n\in\mathbb{Q}, n\in\mathbb{N}\}$，则 A 是可数的. 现在证明 A 在 l^p 中稠密. 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$ 以及任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 n 使得

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

由于有理数集$\mathbb{Q}$ 在$\mathbb{R}$ 中稠密，则有 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,0,0,\cdots)\in A$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

于是

$$\| x-y \|^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon^p.$$

故 $y\in A\cap B(x,\varepsilon)$. 因此，$A$ 在 l^p 中稠密.

不可分的赋范线性空间是存在的，例如有界数列空间 l^∞是不可分的(证明可见[1],[2],或[4]).

§3.3 度量空间

度量空间是比赋范线性空间更广泛的一类空间. 在一个集合上只要定义任意两点的“距离”并且满足一定的条件，就可构成一个度量空间. 本节将指出，赋范线性空间(按照由范数导出的度量)是度量空间. 因此，上一节在赋范线性空间中建立的各种点集的概念和性质、收敛性和连续性等可以类似地推广到度量空间. 同时也要特别留心度量空间与赋范线性空间之间的差异.

一、度量空间的定义

定义 3.17 设 X 是一个非空集合. 若 d 是一个 $X\times X$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 即对于任意 $x,y\in X$ 对应于一个实数 $d(x,y)\in\mathbb{R}$, 并且对于任意 $x,y,z\in X$ 满足

(1) $d(x,y)\geqslant 0$, 并且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

(2) $d(x,y)=d(y,x)$,

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$(三角不等式),

则 d 称为 X 上的**度量**(或称为距离函数), (X,d) 称为**度量空间**. 在度量 d 不致于产生混淆的情况下, 度量空间 (X,d) 可简记为 X.

定义中, 三角不等式可推广为更一般的形式.

$$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n).$$

由三角不等式, 可以推出下面的性质.

引理 3.5 在度量空间 (X,d) 中,

(1) 对于任意, $x,y,z\in X$ 有,

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y);$$

(2) 对于任意 $x,y,x_1,y_1\in X$, 有

$$|d(x,y)-d(x_1,y_1)|\leqslant d(x,x_1)+d(y,y_1).$$

证明 (1) 由三角不等式 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$, 得

$$d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y).$$

又由 $d(y,z)\leqslant d(y,x)+d(x,z)$, 得

$$d(y,z)-d(x,z)\leqslant d(x,y).$$

综上两个不等式, 便得到 $|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$.

(2) 证明类似于(1), 留作习题.

设 (X,d) 是度量空间, $Y\subset X$. 若用 X 中的度量 d 表示 Y 中任意两点 x 与 y 的距离 $d(x,y)$, 则 Y 也成为一个度量空间. 这时, Y 称为度量空间 X 的子空间. 显然, 若 Y 是 X 的子空间, Z 是 Y 的子空间, 则 Z 是 X 的子空间.

例 3.19 任何赋范线性空间(关于由范数导出的度量)都是

度量空间. 具体地说，若$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间. 对于任意$x,y\in X$，令

$$d(x,y)=\|x-y\|,$$

则d是X上由范数导出的度量，(X,d)是度量空间.

必须指出，确有很多度量空间(X,d)，即使X是线性空间，但其度量d不能由X上赋予的任何范数导出. 这是由于由范数导出的度量必须满足引理3.1中的性质. 现举例如下.

例 3.20 设s是所有实数(或复数)列的全体组成的集合，按照通常数列的加法和数乘成为线性空间. 对s中的任意两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$和$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},$$

则d是X上的度量. 事实上，d显然满足定义3.17中的条件(1)和(2). 为验证满足条件(3)，考虑实函数$f(t)=\frac{t}{1+t}$. 由于$f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}$在$t>-1$时恒大于零，因此$f(t)$在$(-1,\infty)$上单调增加. 于是对于任意实(复)数a和b，因$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，故

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

再任取$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in s$，令$a=\xi_i-\zeta_i$，$b=\zeta_i-\eta_i$，则从上面的不等式得到

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}\\&=d(x,z)+d(z,y),\end{aligned}$$

即条件(3)成立. 但是，对任意$x,y,z\in X$及$\alpha\in\mathscr{K}$，此度量d显然不满足如下性质：

(1) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$;

(2) $d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y)$.

由引理 3.1 可断定，此度量 d 不是由 s 上的范数导出的度量.

例 3.21 设 X 是一个非空集合. 若对任意 $x,y\in X$，定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{当 } x=y \\ 1 & \text{当 } x\neq y\end{cases},$$

则容易验证 d 是 X 上的度量. 此度量 d 称为 X 上的**离散度量**，(X,d) 称为**离散度量空间**.

下面介绍两个度量空间等距的概念.

定义 3.18 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个度量空间.

(1) 若映射 $f: X\to Y$ 是双射，并且对 X 中任意两点 x 和 y 有

$$d(x,y)=\rho((fx),f(y)),$$

则 f 称为 X 到 Y 上的**等距映射**.

(2) 若存在一个 X 到 Y 上的等距映射，则 X 和 Y 称为是**等距的**.

二、度量空间中的点集和序列的收敛

在赋范线性空间中，从由范数导出的度量出发，所给出的赋范线性空间中各种点集及序列收敛的定义，所得到的有关的定理和性质，差不多都可以推广到度量空间. 现只叙述在度量空间中相应的定义及成立的定理和性质，其证明完全类似于前面的证明，不再赘述.

设 (X,d) 是度量空间，A 和 B 是 X 的两个非空子集，$x_0\in X$，记

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

$d(A,B)$ 称为 A 与 B 的距离. 记

$$d(x_0,B)=\inf\{d(x_0,y)\mid y\in B\},$$

$d(x_0,B)$ 称为点 x_0 与集 B 的距离. 记

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\},$$

$\delta(A)$称为集 A 的直径. 若 $\delta(A)<+\infty$,则 A 称为是有界的,否则称为是无界的.

对于 $x_0\in X$ 及 $r>0$,记

$$B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\},$$

$$\widetilde{B}(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)\leqslant r\},$$

$B(x_0,r)$称为以 x_0 为中心 r 为半径的开球,$\widetilde{B}(x_0,r)$称为以 x_0 为中心 r 为半径的闭球.

类似于引理 3.2,容易证明:度量空间 X 的子集 A 是有界的,当且仅当存在一个开球 $B(x_0,r)$使得 $A\subset B(x_0,r)$.

设(X,d)是度量空间,$\{x_n\}$是 X 中的序列.

若存在 $x\in X$,对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 $n>N$,有

$$d(x_n,x)<\varepsilon\ (\text{或者 } x_n\in B(x,\varepsilon)),$$

则称序列$\{x_n\}$在 X 中收敛于 x,x 称为序列$\{x_n\}$的极限,记为 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,或简记为 $x_n\to x$.

若对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 $m,n>N$,有

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon,$$

则序列$\{x_n\}$称为 X 中的 Cauchy 序列.

若 X 中每一个 Cauchy 序列都收敛,则 X 称为完备的度量空间.

在§3.1 的引理 3.3 和引理 3.4 中,关于收敛序列和 Cauchy 序列的结论在度量空间中也是成立的.

设 A 是度量空间 X 的子集,$x\in X$.

若对于每一点 $x\in A$,存在 $r>0$ 使得 $B(x,r)\subset A$,则 A 称为 X 中的开集. 若 A^C 是 X 中的开集,则 A 称为 X 中的闭集.

若对于每一个 $r>0$ 都有 $A\cap B(x,r)\neq\varnothing$,则 x 称为集 A 的接触点. A 的所有接触点组成的集称为 A 的闭包,记为 $\overline{A}$.

若 $\overline{A}=X$，则称 A 在 X 中稠密. 若 X 有一个可数稠密的子集，则称 X 是可分的.

在§3.2的定理 3.6、定理 3.7 和定理 3.8 中，关于开集、闭集和闭包的结论在度量空间中也是成立的.

相应于定理 3.9，类似地可以证明在完备的度量空间中的一个结论：

设 X 是完备的度量空间，$A\subset X$，则 X 的子空间 A 是完备的当且仅当 A 是 X 中的闭集.

三、完备化空间

§3.1 中的完备和不完备的赋范线性空间的例子当然也可以看作为完备和不完备的度量空间的例子. 由于不完备的度量空间的存在，很自然地提出不完备的度量空间的完备化问题. 正如数直线$\mathbb{R}$中的有理数集$\mathbb{Q}$一样，$\mathbb{Q}$是不完备的，但是$\mathbb{R}$是完备的且$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密. 在实数理论中，称$\mathbb{R}$为$\mathbb{Q}$的完备化. 类似地，对于一个不完备的度量空间有下面的完备化定理.

定理 3.10 对于任何度量空间(X,d)，都存在一个完备的度量空间$(\hat{X},\hat{d})$，它有一个子空间 W，使得

(1) W 与 X 是等距的，

(2) W 在 $\hat{X}$ 中稠密.

这个度量空间$(\hat{X},\hat{d})$称为(X,d)的**完备化**或**完备化空间**. 在等距的意义下，完备化空间$(\hat{X},\hat{d})$是唯一的，即若$\tilde{X}$是任何一个完备的度量空间，它有一个子空间$\tilde{W}$满足上述两个条件，则 $\hat{X}$ 与 $\tilde{X}$ 是等距的.

证明可参见[1]，[2]和[5]等书.

在已讨论过的不完备的度量空间的例子中，比如 $P[a,b]$是不完备的（例 3.14），但是 $C[a,b]$是完备的（例 3.11），并且 $P[a,b]$在 $C[a,b]$中稠密（Weierstrass 定理），所以 $C[a,b]$是 $P[a,b]$的完

备化. 在例 3.13 中，$(C[0,1],\|\cdot\|_1)$是不完备的，它的完备化空间是$L[0,1]$(即闭区间$[0,1]$上的 Lebesgue 可积函数的全体构成的空间). 有关 Lebesgue 积分的知识，将在下节介绍.

四、连续映射及其等价命题

设(X,d)和(Y,ρ)是两个度量空间，映射 $f: X\to Y$，$x_0\in X$. 若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 X 中所有满足 $d(x,x_0)<\delta$ 的 x，有

$$\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon,$$

则称映射 f 在点 x_0 连续.

若映射 f 在 X 的每一点都连续，则称映射 f 在 X 上连续.

由定义可以看出：映射 $f: X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续，当且仅当对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$f((B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon).$$

定理 3.1 的结论在度量空间中也是成立的，即对于度量空间 X 到度量空间 Y 的映射 f，f 在点 $x_0\in X$ 连续，当且仅当对于 X 中任意序列$\{x_n\}$，若在 X 中 $x_n\to x_0$ 则在 Y 中 $f(x_n)\to f(x_0)$.

此外，f 为连续映射的等价条件还表达在下面的定理中.

定理 3.11 设(X,d)和(Y,ρ)是两个度量空间，f 是 X 到 Y 的映射，则下列各命题等价：

(1) f 是连续的.

(2) 对于 Y 中任意开集 G，$f^{-1}(G)$是 X 中的开集.

(3) 对于 Y 中任意闭集 F，$f^{-1}(F)$是 X 中的闭集.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 G 是 Y 中的开集，要证 $f^{-1}(G)$是 X 中的开集. 若 $f^{-1}(G)=\varnothing$，则 $f^{-1}(G)$是开集. 现设 $f^{-1}(G)\neq\varnothing$，对于任意 $x_0\in f^{-1}(G)$，有 $f(x_0)\in G$. 由于 G 是开集，则存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(f(x_0),\varepsilon)\subset G$. 应用 f 在 x_0 连续的条件，必存在 $\delta>0$ 使得

$$f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)\subset G,$$

从而

$$B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(f(B(x_0,\delta)))\subset f^{-1}(G).$$

因此 $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.

(2)⇒(1) 对于任意 $x\in X$ 及任意 $\varepsilon>0$,由假设条件可得到 $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ 是 X 中的开集,又 $x\in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$,则存在 $\delta>0$ 使得

$$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)),$$

从而

$$f(B(x,\delta))\subset f(f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)))\subset B(f(x),\varepsilon).$$

这表明 f 在 X 的任意点 x 连续. 因此 f 是连续的.

(2)与(3)等价的证明从下面的关系式可立即得到:若映射 $f: X\to Y, A\subset Y$,则有关系式

$$f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A).$$

证毕.

§3.4 Lebesgue 积分与 L^p 空间

本节主要介绍建立 Lebesgue 积分的基本思想、Lebesgue 积分的主要性质以及在数学很多分支中应用较多的 L^p 空间. 很多重要的定理我们都没有具体证明,有兴趣的读者可参见书后参考文献中所列的任何一本有关实变函数的教材.

在本节中,所有的集合都是 $\mathbb{R}$ 中的集合,函数(除特别声明外)都是实值函数.

一、从 Riemann 积分到 Lebesgue 积分

Riemann 积分(以下简称 R-积分)就是微积分中熟知的定积分. 它在基础数学理论以及应用中占有重要的地位. 但是随着现代数学的理论及应用的发展,R-积分逐渐显示出若干缺陷和不足,不适应于数学的发展. 新的积分理论正是在这种需求下,于上世纪末和本世纪初,在很多数学家富有成效的工作的基础上,1902 年法国数学家 Lebesgue 提出了他的新的积分理论. 这种新的积分称

为 Lebesgue 积分(以下简称 L-积分或积分),它在很多方面克服了 R-积分的缺陷,特别是在运算上具有更大的适用性及灵活性.

首先,回顾一下 R-积分的定义.

设 f 是定义在区间$[a,b]$上的有界函数. 在$[a,b]$上任取一组分点(即一个分划):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

在每一个子区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,此子区间的长记为 Δx_i(即 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$),作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{3.10}$$

若当 $n\to\infty$ 且 $\lambda = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时,和式(3.10)的极限存在,且此极限值不依赖于 ξ_i 的选取方法和区间$[a,b]$的分划,则此极限值称为函数 f 在区间$[a,b]$上的 Riemann 积分或称为定积分,记为

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

这时,f 称为在$[a,b]$上是 Riemann 可积的,简称为 R-可积的.

在上述定义中,函数 f 在每一个子区间$[x_{i-1},x_i]$上的上确界和下确界分别记为 M_i 和 m_i,即

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\}.$$

令 $\omega_i = M_i - m_i$, ω_i 称为 f 在子区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅. 可以证明函数 f 在$[a,b]$上是 R-可积的当且仅当

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0. \tag{3.11}$$

从(3.11)式可以知道,$[a,b]$上的连续函数和分段连续函数都是 R-可积的. 大体上可以说,R-可积函数包含了那些间断点"不太多"的有界函数. 但是,有很多函数不能包含在 R-可积函数的范围内. 例如区间$[0,1]$上的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\ 是[0,1]中的有理数\\ 0 & 当\ x\ 是[0,1]中的无理数\end{cases}$$

不是 R-可积的，因为它在[0,1]的任何子区间上的振幅 $\omega_i=1$，而(3.11)式不成立. R-积分对于被积函数的要求较高是它的一缺陷.

此外，R-积分在关于积分与极限交换次序(包括积分与极限、分与微分、积分与积分)的一些基本运算上所要求的条件也较苛，因而限制了它的更广泛的应用.

Lebesgue 建立的积分理论的基本思想是，将对函数 f 的定义区间作分划改为对 f 的值域作分划. 此积分的定义可作如下设

设 f 是定义在区间$[a,b]$上的有界函数，在 y 轴上函数 f 的域 $\mathscr{R}(f)\subset[c,d]$. 在$[c,d]$上任取一组分点：

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d.$$

$E_i=\{x\in[a,b]\mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$，则$[a,b]$被分成为 n 个互不交的集合 $E_1,E_2,\cdots E_n$. (在图 3-7 中，$E_i=E_{i1}\cup E_{i2}\cup E_{i3}$.) 如果多求出每一个集 E_i 的"长度"，记为 mE_i，任取 $\eta_i\in[y_{i-1},y_i)$ 作式

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i mE_i. \tag{3.12}$$

当 $n\to\infty$ 且 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})\to 0$ 时，和式(3.12)的极限存在，此极限可定义为函数 f 在区间$[a,b]$上的积分.

这一新积分定义的设想的优点在于，去掉了 R-积分对函数在一个子区间上的振幅 ω_i 的要求. 但是为了完善新积分的定义，须解决如下两个问题.

(1) 集 E_i 的"长度"mE_i 如何定义?

(2) 函数 f 应满足什么条件才能保证每一个 E_i 都具有 mE_i?

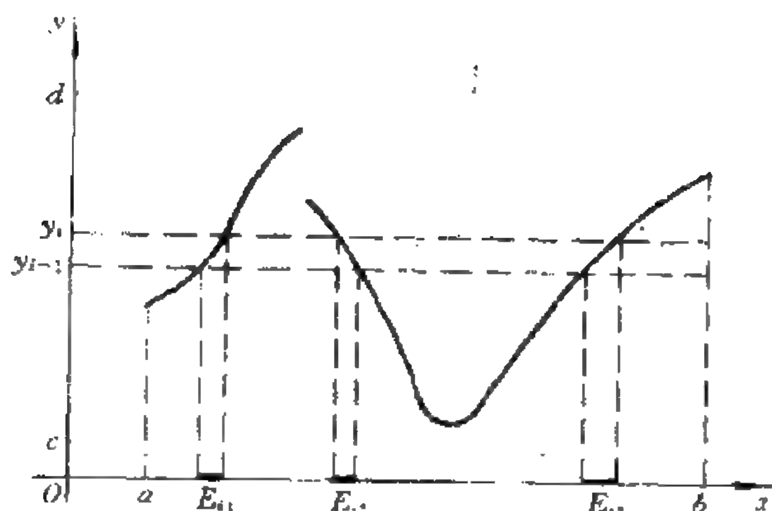

图 3-7

实际上，第一个问题是如何在数直线$\mathbb{R}$上建立集合Lebesgue 测度. 对于第二个问题，以后将指出：具有这种性质的数就是所谓的可测函数. 解决这两个问题之后，就可得Lebesgue 积分的定义. 由于篇幅所限，我们采用直观的方法给这些概念的准确的定义，列出主要的定理和性质而不加证明. 希理论严谨的读者可参考实变函数的有关教材.

二、集合的 Lebesgue 测度

关于如何在数直线$\mathbb{R}$上建立集合的测度理论，这里不展开细的讨论. 直观上，可从它是区间长度的一种推广的角度来介Lebesgue 测度理论.

设 $I=(a,b)$. 记号 $|I|$ 表示开区间 (a,b) 的长度，即 $|I|=b-$ 设 $E\subset\mathbb{R}$，称 $\{I_n\}$ 是一列覆盖 E 的开区间，是指 $\{I_n\}$ 中含有有限可数多个开区间且其中所有开区间的并 $\bigcup_n I_n\supset E$. 这时，以记 $\sum_n |I_n|$ 表示 $\{I_n\}$ 中所有开区间的长度之和.

定义 3.19 设 $E\subset\mathbb{R}$，对于每一列覆盖 E 的开区间 $\{I_n\}$，称 $\sum_n |I_n|$ 是一个非负实数或为 $+\infty$，所有这些和数组成的集合有

界，故必有下确界，记为 m^*E，即

$$m^*E=\inf\left\{\sum_n |I_n| \mid \bigcup_n I_n \supset E\right\}.$$

m^*E 称为集合 E 的**外测度**.

由定义，任何集合都有外测度，集合的外测度可能为有限值也可能为 $+\infty$. 容易证明：

(1) 空集和至多可数集的外测度都等于零；

(2) 任何区间的外测度就是它的长度.

如果把集合 E 的外测度的定义理解为用覆盖 E 的开区间从外面向里面收缩的话，那么下面的定义就可以理解为如何从里面向外面膨胀.

定义 3.20 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的有界集，并设有一区间 I 使得 $E\subset I$. 对于每一列覆盖 $I\setminus E$ 的开区间 $\{I_n\}$，有

$$I\setminus \bigcup_n I_n \subset E.$$

令

$$m_*E=\sup\left\{|I|-\sum_n |I_n| \;\middle|\; I\setminus \bigcup_n I_n \subset E\right\}.$$

m_*E 称为 E 的**内测度**.

须指出，有界集 E 的内测度实际上并不依赖于区间 I 的选择. 由定义可知，任何有界集 E 都有内测度，并且 $m_*E\leqslant m^*E$. 容易证明：空集和至多可数集的内测度等于零，任何区间的内测度就是它的长度.

定义 3.21 设 $E\subset\mathbb{R}$.

(1) 当 E 是有界集时，若 $m_*E=m^*E$，则 E 称为 Lebesgue 可测集，简称为可测集. 这时，E 的内(或外)测度的值称为 E 的 **Lebesgue 测度**，简称为测度，记为 mE，即

$$mE=m_*E=m^*E.$$

(2) 当 E 是无界集时，若对任意区间 I，$E\cap I$ 都是可测集，则 E 称为可测集. 这时，规定 E 的测度 mE 为

$$mE = \lim_{a\to+\infty} m[E \cap (-a,a)].$$

由此定义，空集和至多可数集都是可测集，且它们的测度都等于零；任何区间都是可测集，且区间的测度就等于它的长度. 因此，集合的测度是区间的长度的推广.

注意，对于无界的可测集 E，mE 可能为有限值也可能为 $+\infty$.

设 E，F 和 $E_n(n\in\mathbb{N})$ 皆为$\mathbb{R}$ 中的可测集. 可以证明：

(1) 若 $E\subset F$，则 $mE\leqslant mF$ (单调性)；

(2) $E\cup F$，$E\cap F$ 及 $E\setminus F$ 皆为可测集，并且当 $E\cap F=\varnothing$时

$$m(E\cup F) = mE + mF;$$

(3) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是可测集，并且当各个 E_n 互不相交时，

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}mE_n(\text{可数可加性})；$$

(4) 若 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$，则 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是可测集，且

$$mE = \lim_{n\to\infty}mE_n;$$

(5) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是可测集；

(6) 若 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$，则 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是可测集，且当 $mE_1<+\infty$时，

$$mE = \lim_{n\to\infty}mE_n.$$

若 $mE=0$，则称 E 为**零测度集**.

显然，零测度集的子集也是零测度集；空集和至多可数集都是零测度集. 但是，零测度集并不一定都是至多可数集. 换句话说，存在测度为零的不可数集.

还应指出，$\mathbb{R}$ 中的开集、闭集、可数多个开集的交、可数多个闭集的并都是可测集，并且这些集合与零测度集的并或差所得到的

集合也都是可测集．但是，$\mathbb{R}$ 中存在不可测集．实际上，任何测度不为零的可测集中都含有不可测的子集．

定义 3.22　设 E 是可测集，$p(x)$ 是一个与 $x\in E$ 有关的命题．若除去 E 的某个零测度子集 A 之外，$p(x)$ 在 $E\setminus A$ 上处处成立，则称 $p(x)$ 在 E 上**几乎处处成立**，记为在 E 上 $p(x)$ (a.e.)．

例如，若 f 和 g 是定义在可测集 E 上的函数，且

$$\{x\in E \mid f(x)\neq g(x)\}$$

是零测度集，则在 E 上 $f(x)=g(x)$ (a.e.)．

又如，$[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $D(x)=0$ (a.e.)，因为 $[0,1]$ 上有理数的全体组成的集合是可数的，从而它是零测度集．

三、可测函数

定义 3.23　设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的可测集，f 是定义在 E 上的函数．若对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，集合

$$E(f>\alpha)=\{x\in E \mid f(x)>\alpha\}$$

是可测集，则 f 称为 E 上的 **Lebesgue 可测函数**，简称为可测函数，或称为是可测的．

可以证明，对于定义在可测集 E 上的函数 f，以下各条是等价的：

(1) f 是 E 上的可测函数．

(2) 对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，

$$E(f\geqslant\alpha)=\{x\in E \mid f(x)\geqslant\alpha\}$$

是可测集．

(3) 对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，

$$E(\alpha\leqslant f<\beta)=\{x\in E \mid \alpha\leqslant f(x)<\beta\}$$

是可测集．

例 3.22　定义在 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数是可测函数．

事实上，若 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，则对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$，集合

$$\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)>\alpha\}=f^{-1}((\alpha,+\infty))$$

是开集，从而是可测集. 由定义 3.23，f 是可测函数.

例 3.23　区间$[0,1]$上的 Dirichlet 函数 $D(x)$是可测函数，因为对于任意 $a\in\mathbb{R}$

$$\{x\in[0,1]\mid D(x)>a\}=\begin{cases}\varnothing & \text{当 } a\geq 1\\ [0,1]\cap\mathbb{Q} & \text{当 } 0\leq a<1\\ [0,1] & \text{当 } a<0\end{cases}$$

都是可测集.

以上两例说明，可测函数是比连续函数更广泛的一类函数.

显然，定义在零测度集上的任何函数都是可测的.

可以证明，若 $f,g,f_n(n\in\mathbb{N})$是可测集 E 上的可测函数，$\alpha\in\mathbb{R}$，则 $\alpha f, f\pm g, \dfrac{f}{g}(g(x)\neq 0(x\in E))$，$|f|$，$\sup\{f,g\}$，$\inf\{f,g\}$，$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$，$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$都是 E 上的可测函数.

四、Lebesgue 积分的定义

1. 测度为有限的集合上的有界可测函数的 L-积分

定义 3.24　设 $mE<+\infty$，f 是定义在 E 上的有界可测函数，且 $c<f(x)<d$ $(x\in E)$. 在$[c,d]$上任取一组分点(即一个分划)：

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d.$$

令 $E_i=\{x\in E\mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$，任取 $\eta_i\in[y_{i-1},y_i)$ $(i=1,\cdots,n)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i mE_i. \tag{3.12}$$

若当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})\to 0$ 时，和式(3.12)的极限存在，且此极限值不依赖于区间$[c,d]$的分划和 η_i 的选取方法，则此极限值称为 f 在 E 上的 **Lebesgue 积分**，简称为 L-积分，记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\, mE_i.$$

这时，f 称为在 E 上是 **Lebesgue 可积的**，简称为 L-可积的.

当 $E=[a,b]$ 时，L 积分 $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ 也可记为

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在不致于引起混淆的情况下，还可以简记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

下面给出几个定理和性质. 省略其证明.

定理 3.12 设 $mE<+\infty$，则 E 上任何有界可测函数 f 都是 L-可积的.

L-积分有同 R-积分类似的运算性质.

定理 3.13 设 $mE<+\infty$，f 和 g 是 E 上的有界可测函数，α 和 β 为实数，则下列各条成立.

(1) $\int_E \alpha \mathrm{d}x = \alpha mE$.

(2) 线性性 $\int_E (\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x=\alpha\int_E f\mathrm{d}x+\beta\int_E g\mathrm{d}x$.

(3) 单调性 若 $f\leqslant g$ (a.e.)，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(4) 介值性 若 $a\leqslant f(x)\leqslant b$ $(x\in E)$，则

$$amE \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant bmE.$$

由此可得，当 $mE=0$ 时，$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

(5) 若 $f=g$ (a.e.)，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

由定理3.12、例3.23以及定理3.13可知，区间[0,1]上的 Dirichlet

函数是 L-可积的，且

$$\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x = 0.$$

关于定义在区间$[a,b]$上的有界函数的 R-积分和 L-积分有如下关系.

定理3.14　设 f 是$[a,b]$上的有界函数，若 f 在$[a,b]$上是 R-可积的，则 f 在$[a,b]$上是可测的，因而是 L-可积的，并且

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在此顺便指出函数 f 在区间$[a,b]$上 R-可积的一个充分必要条件.

定理3.15　设 f 是$[a,b]$上的有界函数，则 f 在$[a,b]$上是 R-可积的充分必要条件是，f 在$[a,b]$上几乎处处连续.

下面将 L-积分的概念推广到任意可测集 E(mE 可以为$+\infty$)和任意可测函数 f (f 可以为无界函数)的情况.

2. 任意可测集 E 上的非负可测函数的 L-积分

定义3.25　设 $mE<+\infty$，f 是 E 上的非负可测函数. 对于每一个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$[f]_n(x) = \begin{cases} f(x) & 当\ f(x)\leqslant n \\ n & 当\ f(x) < n \end{cases},$$

则$\{[f]_n\}$是 E 上的一列有界可测函数，从而对每一个 $n\in\mathbb{N}$，积分 $\int_E [f]_n(x)\mathrm{d}x$ 存在. 又因为

$$[f]_1 \leqslant [f]_2 \leqslant \cdots \leqslant [f]_n \leqslant \cdots,$$

所以$\left\{\int_E [f]_n(x)\mathrm{d}x\right\}$是单调增加数列，于是极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f]_n(x)\mathrm{d}x$$

为有限值或为$+\infty$. 此极限称为 f 在 E 上的 L-积分，记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E [f]_n(x)\mathrm{d}x.$$

当上式右端的极限为有限值时，称 f 在 E 上是 L-可积的，否则称 f 在 E 上的积分为$+\infty$.

现在去掉 $mE<+\infty$的条件.

定义3.26 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数. 对于每一个 $n\in N$，令

$$E_n = [-n,n]\cap E,$$

则$\{E_n\}$是一列测度有限的可测集，且满足

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots,\ E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

由定义3.25，f 在每一个 E_n 上都有积分，并且

$$\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots\leqslant\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\cdots.$$

因此，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x$ 为有限值或为$+\infty$. 此极限称为 f 在 E 上的 L-积分，记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

若上式右端的极限为有限值，则称 f 在 E 上是 L-可积的，否则称 f 在 E 上的积分为$+\infty$.

3. 任意可测集 E 上的任意可测函数的 L-积分

定义3.27 设 f 是可测集 E 上的可测函数，令

$$f^+(x)=\sup\{f(x),0\}=\begin{cases}f(x) & \text{当 } f(x)\geqslant 0\\ 0 & \text{当 } f(x)<0\end{cases},$$

$$f^-(x)=\inf\{-f(x),0\}=\begin{cases}-f(x) & \text{当 } f(x)\leqslant 0\\ 0 & \text{当 } f(x)>0\end{cases}.$$

显然，f^+ 和 f^- 都是 E 上的非负可测函数且 $f=f^+-f^-$.

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 不同时为$+\infty$，则称 f 在 E 上

有 L-积分. 这时, f 在 E 上的 L 积分规定为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x.$$

若 f^+ 和 f^- 在 E 上都是 L-可积的,则 f 称为在 E 上是 L-可积的. 这时, f 在 E 上的 L-积分为有限值.

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 同时为 $+\infty$, 则称 f 在 E 上的 L-积分没有意义,或者说没有积分.

至此,在测度为有限的集合上的有界可测函数的 L-积分的定义已推广到任意可测集上的任意可测函数的 L-积分.

推广后的 L-积分仍具有前面定理3.13中的各条积分运算性质,不再重复. 此外,还需特别指出的是推广后的 L-积分满足如下的绝对可积性.

定理3.16　设 f 是可测集 E 上的可测函数,则 f 在 E 上是 L-可积的,当且仅当 $|f|$ 在 E 上是 L-可积的. 当 f 在 E 上 L 可积时,有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

此定理说明, L 积分是一种具有绝对可积性的积分. 这一点有别于广义 R-积分. 因此应当注意,对于无界区域或无界函数而言,广义 R-可积函数并不一定是 L-可积函数.

五、Lebesgue 积分的几个重要定理

下面给出的 L 积分的几个重要定理(省略其证明)主要阐述关于积分与极限交换次序和重积分中交换累次积分次序的结论. 从中可以看出, L-积分交换次序所要求的条件比 R 积分弱得多, 这正是 L-积分的优点.

定理3.17(Lebesgue 控制收敛定理)　设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数,若

(1) 存在一个 E 上的 L-可积函数 $F(x)$, 使得对每一个 $n\in$

N，在 E 上皆有 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ (a.e.)，

(2) 在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ (a.e.)，

则 f 在 E 上是 L-可积的，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

当 $mE<+\infty$，且 $F(x)=M$ $(x\in E)$ 时，由于常值函数在测度为有限的集合上总是 L-可积的，因此下面的推论成立。

推论（Lebesgue 有界收敛定理） 设 $mE<+\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上的一列可测函数，若

(1) 存在一个常数 $M>0$，使得对每一个 $n\in N$ 在 E 上皆有 $|f_n(x)|\leqslant M$ (a.e.)，

(2) 在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ (a.e.)，

则 f 在 E 上是 L-可积的，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理3.18（逐项积分定理） 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列非负可测函数，且在 E 上 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ (a.e.)，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理3.19（Levi） 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列非负可测函数，且

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots.$$

若在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ (a.e.)，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

在 $\mathbb{R}$ 中建立 Lebesgue 测度的方法很容易推广到 $\mathbb{R}^n$ 上，在 $\mathbb{R}^n$ 上类似地定义集合的 Lebesgue 测度。它可看作是 $\mathbb{R}^n$ 中“广义长方

体”的“体积”的推广. 类似于在$\mathbb{R}$中定义 L-积分的方法，在$\mathbb{R}^n$中也可定义 L-积分. $\mathbb{R}^n$中的 L-积分化为累次积分以及交换两个累次积分的次序的定理就是下面的 Fubini 定理.

定理 3.20(Fubini) 设 $A\subset\mathbb{R}^p$ 和 $B\subset\mathbb{R}^q$ 是两个可测集，$f(x,y)$是 $A\times B\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q=\mathbb{R}^{p+q}$上的可测函数. 若 f 在 $A\times B$ 上是 L-可积的，则

$$\int_{A\times B}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A\mathrm{d}x\int_B f(x,y)\mathrm{d}y=\int_B\mathrm{d}y\int_A f(x,y)\mathrm{d}x.$$

六、$L^p[a,b]$空间

为了简单起见，仅在$\mathbb{R}$的闭区间$[a,b]$上讨论 L^p 空间，有关结论完全可以推广到$\mathbb{R}$的任何一个可测集 E 上.

定义 3.28 设 p 为一个实数($1\leqslant p<\infty$)，若闭区间$[a,b]$上的可测函数满足

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x<+\infty,$$

则 f 称为$[a,b]$上的 **p 幂 Lebesgue 可积函数**，简称为 p 幂可积函数. 闭区间$[a,b]$上所有 p 幂可积函数的全体组成的集合记为 $L^p[a,b]$.

在 $L^p[a,b]$上按点定义两个函数的加法运算和数与函数的数乘运算，即对于任意 $f,g\in L^p[a,b]$及 $\alpha\in\mathbb{R}$，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),\quad (x\in[a,b]).$$

应用下面的 Minkowski 不等式，立即可知 $L^p[a,b]$关于此线性运算成为线性空间.

引理 3.6 对于任意 $f\in L^p[a,b]$，$g\in L^q[a,b]$，这里 $p>1$，$q>1$且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，下面的 Hölder 不等式

$$\int_a^b|fg|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

成立，并且由此可知 $fg\in L[a,b]$.

引理3.7 对于任意 $f,g\in L^p[a,b]$，这里 $p\geqslant 1$，下面的 Minkowski 不等式

$$\left(\int_a^b|f+g|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立. 并且由此可知 $f+g\in L^p[a,b]$.

对于线性空间 $L^p[a,b]$中的任一元素 f，定义

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

如果把 $L^p[a,b]$中两个几乎处处相等的元素看作同一元素，那么容易验证上面定义的$\|\cdot\|_p$是 $L^p[a,b]$上的范数，关于此范数，$L^p[a,b]$是一个赋范线性空间.

由 $L^p[a,b]$上的范数可导出其上的度量，即对任意 $f,g\in L^p[a,b]$

$$d(f,g)=\|f-g\|_p=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

可以证明：

(1) 赋范线性空间 $L^p[a,b]$是完备的，即它是 Banach 空间.

(2) 空间 $L^p[a,b]$是可分的.（实际上，$[a,b]$上有理系数的多项式的全体组成的子空间 $P_0[a,b]$在 $L^p[a,b]$中稠密.）

(3) 关于 $L^p[a,b]$的范数$\|\cdot\|_p$，不完备的赋范线性空间$(C[a,b],\|\cdot\|_p)$的完备化空间就是 $L^p[a,b]$.

当 $p=2$时，在线性空间 $L^2[a,b]$中可以定义二元素 f 和 g 的内积

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\ ,$$

则 $L^2[a,b]$关于此内积成为内积空间. 由此内积导出的范数就是$\|\cdot\|_2$，即对于 $f\in L^2[a,b]$，显然

$$\|f\|_2=(f,f)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此 $L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.

对于闭区间 $[a,b]$ 上定义的复值函数 f，若 f 的实部和虚部都是 $[a,b]$ 上的(实值)可测函数，则 f 称为 E 上的复值可测函数.

若 $[a,b]$ 上的复值可测函数 f 的实部和虚部都是 $[a,b]$ 上的 L-可积函数，则 f 称为 $[a,b]$ 上的复值 L-可积函数.

同样可用记号 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$ 表示 $[a,b]$ 上满足如下条件的复值 L-可积函数的全体：

$$\int_a^b |f(x)|^p dx<+\infty.$$

与前面的讨论一样，定义范数 $\|\cdot\|_p$，于是 $L^p[a,b]$ 成为复赋范线性空间.

§3.5 紧 性

紧性在分析中是一个很重要的概念. 本节将在赋范线性空间(或度量空间)中介绍紧集和紧空间的定义. 所有的定理都是在赋范线性空间中得到的. 实际上，在所有的定理中，将“赋范线性空间”改换为“度量空间”其结论仍然成立.

定义 3.29 设 A 是赋范线性空间(或度量空间) X 的子集.

(1) 若 A 中任意序列 $\{x_n\}$ 都有一个收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$ (即 $x_{n_k}\to x_0\in X$)，则 A 称为 X 中的**列紧集**.

(2) 若 A 中任意序列 $\{x_n\}$ 都有一个收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$，且 $x_{n_k}\to x_0\in A$，则 A 称为 X 中的**自列紧集**，或称为**紧集**.[1]

---

[1] 严格地说，自列紧集与紧集的概念有所不同，但是在赋范线性空间和度量空间中这两个概念是等价的. 本书中研究的问题都是在赋范线性空间或度量空间中进行的，因此可以不必区分二者之间的差异.

(3) 若 X 本身是列紧集，故 X 是紧集，则 X 称为**紧空间**.

由上述定义可知，在赋范线性空间(或者在度量空间)中，紧集实际上就是列紧的闭集.

紧集和紧空间具有下面的性质.

定理3.21 设 X 是赋范线性空间.

(1) 若 A 是 X 中的列紧集，则 A 是有界的. 由此可得到：若 A 是 X 中的紧集，则 A 是 X 中的有界闭集.

(2) 若 X 是紧空间，则 X 中任何闭集都是紧集.

(3) 任何紧空间都是完备的.

证明 (1) 设 A 是 X 中的列紧集. 假若 A 是无界的，则 A 中必存在无界序列，使得

$$\|x_n\|>n \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

由于收敛序列必有界，因此$\{x_n\}$中不可能包含有收敛的子序列，此与 A 的列紧性矛盾.

(2) 设 A 是紧空间 X 中的闭集，即 $A=\overline{A}$. 对于 A 中任意序列$\{x_n\}$，因 X 是紧空间，故存在收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x$. 由§3.2定理3.8(1)得 $x\in\overline{A}=A$，则 A 是紧集得证.

(3) 留作习题.

定理3.22 紧集的连续象是紧集.

证明 设 f 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的连续映射，A 是 X 中的紧集，需要证明 $f(A)$是 Y 中的紧集.

设$\{y_n\}$是 $f(A)$中任意序列，则存在$\{x_n\}\subset A$，使得 $y_n=f(x_n)$ $(n\in\mathbb{N})$. 由于 A 是紧集，则$\{x_n\}$有一个收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$，且 $x_{n_k}\to x\in A$，于是$\{y_{n_k}\}$是$\{y_n\}$的子序列，且由 f 的连续性得

$$y_{n_k}=f(x_{n_k})\to f(x)\in f(A).$$

因此 $f(A)$是 Y 中的紧集. 证毕.

应用数直线$\mathbb{R}$的完备性可以证明，$\mathbb{R}$(或者$\mathbb{R}^n$)中任何有界集

都是列紧的. 因此,$\mathbb{R}$(或者者$\mathbb{R}^n$)中任何有界闭集都是紧集. 特别地,$\mathbb{R}$ 中的闭区间$[a,b]$是紧集. 在实分析中,有界闭区间上的连续函数具有重要的性质,例如,在有界闭区间上的连续函数是有界的,并且可以达到上确界和下确界. 一般地说,紧集上的连续泛函也有此性质.

定理3.23 紧集上的实值连续泛函是有界的,并且可以达到上确界和下确界.

证明 设 A 是赋范线性空间 X 中的紧集,泛函 $f:X\to\mathbb{R}$ 是连续的. 要证明:$f(A)$是有界的,并且存在 $x_1,x_2\in A$ 使得

$$f(x_1)=\sup\{f(x)\mid x\in A\},$$

$$f(x_2)=\inf\{f(x)\mid x\in A\}.$$

换句话说,$f(A)$有最大值 $f(x_1)$和最小值 $f(x_2)$.

由前面的两个定理可知,$f(A)$是$\mathbb{R}$ 中的有界闭集. 记

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in A\}.$$

由上确界的性质,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x\in A$ 使得

$$M-\varepsilon<f(x)\leqslant M.$$

这表明,以 M 为中心、任意 $\varepsilon>0$为半径的开球$B(M,\varepsilon)(=(M-\varepsilon,M+\varepsilon))$都与 $f(A)$相交,故 $M\in\overline{f(A)}=f(A)$. 因此,存在 $x_1\in A$ 使得

$$f(x_1)=M=\sup\{f(x)\mid x\in A\}.$$

同理可证,存在 $x_2\in A$ 使得

$$f(x_2)=\inf\{f(x)\mid x\in A\}.$$

证毕.

§3.6 有界线性算子

泛函分析中一类重要的问题是研究两个赋范线性空间之间的有界线性算子. 在本节中,将介绍有界线性算子范数的概念. 指出线性算子的有界性与连续性是等价的. 最后讨论有界线性算子的

全体构成的赋范线性空间.

一、有界线性算子及算子范数

定义3.30 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间,$T:X\to Y$ 是线性算子.若存在常数 $c>0$,使得对一切 $x\in X$ 都有

$$\|Tx\|\leqslant c\|x\|, \tag{3.13}$$

则 T 称为 X 上的**有界线性算子**,或称 T 是有界的.

须注意,在(3.13)中范数 $\|x\|$ 和 $\|Tx\|$ 分别表示在 X 和 Y 中的范数.在定义中使用"有界"二字是由于有界线性算子具有如下特征:

线性算子 $T:X\to Y$ 是有界的,当且仅当 T 把 X 中的任意有界集映成 Y 中的有界集.

事实上,必要性是明显的.现证充分性.若 T 把 X 中的任意有界集映成 Y 中的有界集,则 X 中的单位闭球 $\widetilde{B}(0,1)$ 的象 $T(\widetilde{B}(0,1))$ 在 Y 中有界,即存在 $c>0$,使得对任意 $y\in\widetilde{B}(0,1)$ 有 $\|Ty\|\leqslant c$.现任取 $x\in X$ 且 $x\neq 0$,则 $\dfrac{x}{\|x\|}\in\widetilde{B}(0,1)$,于是

$$\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\|=\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant c,$$

从而 $\|Tx\|\leqslant c\|x\|$,并且此不等式当 $x=0$ 时仍然成立.充分性得证.

应当注意,这里线性算子"有界"的含义与微积分学中的有界函数的含义是不同的.在微积分学中,有界函数是指其值域为有界集的函数.

考察不等式(3.13),对于一切 $x\in X$ 且 $x\neq 0$,(3.13)式变形为

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant c. \tag{3.14}$$

满足(3.14)的所有常数 c 必有下确界,或者说所有的 $\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ 必有上确界.于是可作如下定义.

定义3.31 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是有界线性算子. 令

$$\|T\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

则 $\|T\|$ 称为**算子 T 的范数**，或称为 T 的**算子范数**.

当 $X=\{0\}$ 时，规定 $\|T\|=0$.

当 $T:X\to Y$ 是有界线性算子时，对每一个 $x\in X$ 都有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|.$$

引理3.8 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是有界线性算子，则

$$\|T\| = \sup_{x\in X, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\in X, \|x\|\leqslant 1} \|Tx\|. \qquad (3.15)$$

证明 对于任意 $x\in X$ 且 $x\neq 0$，由于 $\frac{x}{\|x\|}$ 的范数为1，则

$$\left\{\frac{x}{\|x\|} \,\middle|\, 0\neq x\in X\right\} = \{x \mid x\in X, \|x\|=1\}$$
$$\subset \{x \mid x\in X, \|x\|\leqslant 1\},$$

于是

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \\ &\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T\|\|x\| = \|T\|.\end{aligned}$$

因此，等式(3.15)成立.

例3.24 赋范线性空间 X 上的恒等算子 $I:X\to X$ 定义为

$$Ix = x \qquad (x\in X).$$

显然，I 是有界线性算子，且 $\|I\|=1$.

赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的零算子 0 定义为

$$0x = 0 \qquad (x\in X).$$

显然，零算子 0 是有界线性算子，且 $\|0\|=0$.

例3.25　设 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s \quad (x\in C[a,b]).$$

显然 T 是线性算子. 对任意 $x\in C[a,b]$,

$$\|Tx\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant\max_{a\leqslant s\leqslant b}|x(s)|(b-a)=(b-a)\|x\|,$$

故 T 是有界的, 且 $\|T\|\leqslant b-a$. 另一方面, 取常值函数 x_0, 使满足 $x_0(t)=1\ (t\in[a,b])$, 则

$$\|T\|\geqslant\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|}=\|Tx_0\|$$
$$=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t 1\mathrm{d}s\right|=b-a.$$

因此, $\|T\|=b-a$.

下面举一个不是有界的线性算子, 即无界线性算子的例子.

例3.26　设 $C^1[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上具有连续的一阶导函数的函数的全体, 它是 $C[0,1]$ 的子空间. 考虑微分算子 $D:C^1[0,1]\to C[0,1]$, 其定义为

$$(Dx)(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \quad (x\in C^1[0,1]).$$

显然 D 是线性算子, 但 D 不是有界的. 事实上, 取 $x_n\in C^1[0,1]$ 满足 $x_n(t)=t^n\,(t\in[0,1])$, 则对每一个 $n\in\mathbb{N}$ 有 $\|x_n\|=1$ 且

$$\|Dx_n\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|nt^{n-1}|=n.$$

因此, 不存在一个固定的常数 c 使得

$$\frac{\|Dx_n\|}{\|x_n\|}=n\leqslant c$$

对任意的 n 都成立. 故 D 不是有界的, 或者说 D 是无界的.

二、线性算子的有界性与连续性

定理3.24　设 X 和 Y 是赋范线性空间, $T:X\to Y$ 是线性算

子.

(1) T 在 X 上是连续的，当且仅当 T 在 X 上是有界的.

(2) 若 T 在某一点 $x_0 \in X$ 连续，则 T 在 X 上连续.

证明 (1) 当 T 为零算子时，结论显然成立. 现设 T 不为零算子.

充分性. 设 T 是有界的. 任取 $x_0 \in X$，对于任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$，则对一切满足 $\|x - x_0\| < \delta$ 的 x，有

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leqslant \|T\| \|x - x_0\|$$
$$< \|T\| \delta = \varepsilon.$$

因此 T 在点 x_0 连续. 由 x_0 的任意性，则得 T 在 X 上连续.

必要性. 若 T 在 X 上连续，则 T 在点 $x_0 \in X$ 连续. 于是，对于 $\varepsilon = 1$，存在 $\delta > 0$，使得对一切满足 $\|x - x_0\| < \delta$ 的 x，有

$$\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon = 1 . \tag{3.16}$$

任取 $y \in X$ 且 $y \neq 0$，令 $x = x_0 + \frac{\delta}{2\|y\|} y$，则 x 满足

$$\|x - x_0\| = \left\| \frac{\delta}{2\|y\|} y \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

因此(3.16)式对此 x 成立，即

$$\|Tx - Tx_0\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{2\|y\|} y\right) \right\| = \frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\| < 1,$$

从而得到

$$\|Ty\| < \frac{2}{\delta} \|y\|.$$

因 $\frac{2}{\delta}$ 是一个与任取的 y 无关的常数，故 T 是有界的.

(2) 由(1)的必要性部分的证明可知，若 T 在 X 的某一点 x_0 连续，则 T 是有界的. 再由(1)得到，T 在 X 上连续. 证毕.

推论 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是有界线性算子. 下列结论成立：

(1) 若在 X 上 $x_n\to x$,则在 Y 上 $Tx_n\to Tx$;

(2) T 的零空间 $\mathscr{N}(T)$是闭的.

证明 (1) 由定理3.24(1)及定理3.1立即得证.

(2) 由定义,线性算子 T 的零空间

$$\mathscr{N}(T)=\{x\in X|Tx=0\}.$$

任取 $\mathscr{N}(T)$中的序列$\{x_n\}$,若 $x_n\to x$,由于 T 连续,以及 $Tx_n=0$,则

$$Tx=\lim_{n\to\infty}Tx_n=0,$$

故 $x\in\mathscr{N}(T)$. 由定理3.8,$\mathscr{N}(T)$是闭集. 证毕.

有必要强调一下定理3.24的重要意义. 对于二赋范线性空间之间的线性算子 T,此定理指出:T 的有界性和连续性是等价的;T 在一点连续可推出 T 在全空间上连续.

三、有界线性算子空间

设 X 和 Y 是在同一数域$\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间,$\mathscr{B}(X,Y)$表示所有 X 到 Y 的有界线性算子的全体组成的集.

在 $\mathscr{B}(X,Y)$上,对于任意 $T,S\in\mathscr{B}(X,Y)$和任意 $\alpha\in\mathbb{K}$,定义 $T+S$ 和 αT 为

$$(T+S)x=Tx+Sx,$$
$$(\alpha T)x=\alpha Tx,\quad (x\in X).$$

显然,$T+S\in\mathscr{B}(X,Y)$,$\alpha T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 因此 $\mathscr{B}(X,Y)$按此线性运算成为线性空间.

对于线性空间 $\mathscr{B}(X,Y)$中任意一个元素 T,定义$\|T\|$为

$$\|T\|=\sup_{x\in X,x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\| \qquad (3.17)$$

(即为算子 $T:X\to Y$ 的算子范数). 容易验证,按此范数 $\mathscr{B}(X,Y)$成为赋范线性空间. 例如验证满足三角不等式. 对于任意 $T,S\in\mathscr{B}(X,Y)$及 $x\in X$,有

$$\|(T+S)x\|\leqslant\|Tx\|+\|Sx\|$$

$$\leqslant (\|T\| + \|S\|)\|x\|,$$

故$\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|$.

归纳上述讨论，实际上已经证明了下面的定理.

定理3.25 赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的所有有界线性算子的全体组成的线性空间 $\mathscr{B}(X,Y)$按(3.17)定义的范数成为赋范线性空间.

自然会提出这样一个问题：在什么条件下$\mathscr{B}(X,Y)$是 Banach 空间？下面的定理指出，只要求 Y 是 Banach 空间，就可以保证$\mathscr{B}(X,Y)$是 Banach 空间.

定理3.26 若 X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，则$\mathscr{B}(X,Y)$是 Banach 空间.

证明 设$\{T_n\}$是$\mathscr{B}(X,Y)$中任意的 Cauchy 序列，则对任意$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得对一切 $n,m>N$，有

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

于是，对每一个 $x\in X$ 及 $n,m>N$，有

$$\|T_nx - T_mx\| \leqslant \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|. \qquad (3.18)$$

这表明，对每一个 $x\in X$，$\{T_nx\}$是 Y 中的 Cauchy 序列. 由于 Y 是完备的，可设 $T_nx\to y\in Y$. 这样，定义了一个算子 $T:X\to Y$，使得对每一个 $x\in X$

$$Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_nx.$$

算子 T 是线性的，因为对任意 $x_1,x_2\in X$ 及数 α,β

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_nx_1 + \beta \lim_{n\to\infty} T_nx_2 \\ &= \alpha Tx_1 + \beta Tx_2. \end{aligned}$$

现证 T 是有界的且 $T_n\to T$. 由(3.18)式及范数的连续性，对一切 $n>N$ 及每一个 $x\in X$，有

$$\|T_nx - Tx\| = \lim_{m\to\infty}\|T_nx - T_mx\| \leqslant \varepsilon\|x\|. \qquad (3.19)$$

这表明，当 $n>N$ 时，T_n-T 是有界线性算子. 又因 T_n 是有界的，故 $T=T_n-(T_n-T)$ 是有界的，即 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 由(3.19)式，对一切 $n>N$ 可得

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T_n-T)x\|\leqslant\varepsilon.$$

因此 $T_n\to T$. 证毕.

四、有界线性算子的乘积

设 X 是赋范线性空间. X 到 X 的有界线性算子的全体组成的赋范线性空间记为 $\mathscr{B}(X,X)$.

定理3.27 设 X 是赋范线性空间，$T,S\in\mathscr{B}(X,X)$，则 T 与 S 的复合 $S\circ T\in\mathscr{B}(X,X)$ 并且

$$\|S\circ T\|\leqslant\|S\|\|T\|.$$

证明 对每一个 $x\in X$，$(S\circ T)x=S(Tx)$，显然 $S\circ T$ 是线性算子. 对每一个 $x\in X$，

$$\|(S\circ T)x\|\leqslant\|S\|\|Tx\|\leqslant\|S\|\|T\|\|x\|,$$

故 $S\circ T$ 是有界的，且 $\|S\circ T\|\leqslant\|S\|\|T\|$. 证毕.

在 $\mathscr{B}(X,X)$ 中，对于任意 $T,S\in\mathscr{B}(X,X)$，定义 T 与 S 的乘积为 T 与 S 的复合，即 $ST=S\circ T$. 这时，对每一个 $x\in X$，

$$(ST)x=S(Tx).$$

由定理 3.27 知，算子 T 与 S 的乘积 $ST\in\mathscr{B}(X,X)$，且满足

$$\|ST\|\leqslant\|S\|\|T\|.$$

上式表明，T 与 S 的乘积 ST 的范数满足所谓的次乘性.

§3.7 有限维赋范线性空间

在泛函分析中，研究的主要对象是无限维空间，而把有限维空间作为特例. 然而从某些应用的角度来看，无限总是通过有限去认识它、逼近它. 因此，有必要在本节中研究有限维赋范线性空间所具有的特性，如有限维赋范线性空间是完备的，有限维线性空间上

任何两个范数都是等价的等. 本节还将指出,有限维赋范线性空间上的线性算子是有界的.

一、有限维赋范线性空间的完备性

先证明一个基本的定理.

定理 3.28 设 X 是 n 维赋范线性空间,$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的基,则存在常数 $c_1,c_2>0$,使得对任意 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$,有

$$c_1\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|\leqslant c_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.20}$$

证明 仅就 X 是实空间的情况进行证明.

对任意 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$,定义映射

$$Tx=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{R}^n,$$

则 T 是 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性同构映射. 由于在 $\mathbb{R}^n$ 中

$$\|Tx\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

因此要证明的不等式(3.20)可写为下面的不等式:

$$c_1\|Tx\|\leqslant\|x\|\leqslant c_2\|Tx\|. \tag{3.21}$$

令 $c_2=\Big(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$,则对任意 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$ 有

$$\|x\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\,\|e_i\|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$=c_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=c_2\|Tx\|. \tag{3.22}$$

另一方面,令 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面,即

$$A=\Big\{a=(\xi_i,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{R}^n\,\Big|\,\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=1\Big\}.$$

对任意 $a=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in A$(即存在 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$,满足 $a=$

Tx)，定义泛函

$$f(a)=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\|x\|,$$

则泛函 $f: A\to\mathbb{R}$ 是连续的. 事实上，对任意 A 中的收敛序列 $\{a_m\}$，$a_m\to a$，则存在 $x_m, x\in X$，$(m\in\mathbb{N})$，使得 $a_m=Tx_m$，$a=Tx$. 由(3.22)式

$$\begin{aligned}|f(a_m)-f(a)| &= |\,\|x_m\|-\|x\|\,|\leqslant\|x_m-x\|\\ &\leqslant c_2\|Tx_m-Tx\| = c_2\|a_m-a\|\to 0,\end{aligned}$$

所以 f 是连续的. 由于 A 是$\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，从而是紧集. 应用定理 3.23，存在 $a_0=Tx_0\in A$，使得

$$f(a_0)=\inf\{f(a)\,|\,a\in A\}.$$

令 $c_1=f(a_0)$，则 $f(a_0)=\|x_0\|>0$. 对任意 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$ 且 $x\neq 0$，有 $\frac{Tx}{\|Tx\|}\in A$，故

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x}{\|Tx\|}\right\| &= f\left(\frac{Tx}{\|Tx\|}\right)\\ &\geqslant\inf\{f(a)\,|\,a\in A\}=c_1.\end{aligned}$$

于是得到

$$\|x\|\geqslant c_1\|Tx\|. \tag{3.23}$$

当 $x=0$ 时，不等式(3.23)仍然成立. 综合(3.22)和(3.23)，则不等式(3.21)得证，也即不等式(3.20)得证. 当 X 是复空间时，证明完全类似. 证毕.

由定理 3.28 所证的不等式(3.20)或(3.21)，容易推出：

(i) $\{x_m\}$是 X 中的 Cauchy 序列，当且仅当$\{Tx_m\}$是$\mathbb{R}^n$(或$\mathbb{C}^n$)中的 Cauchy 序列.

(ii) $\{x_m\}$在 X 中收敛于 x，当且仅当$\{Tx_m\}$在$\mathbb{R}^n$(或$\mathbb{C}^n$)中收敛于 Tx.

由于$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{C}^n$ 是完备的(见 § 3.1 例 3.9)，应用上述结论(i)和

(ii)立即可得到下面的定理.

定理 3.29　任何有限维赋范空间都是完备的.因此,赋范线性空间的任何有限维子空间都是闭的.

证明　不妨设 X 是 n 维实赋范线性空间.若 $\{x_m\}$ 是 X 中任意 Cauchy 序列,按照定理 3.28 中的记号和不等式(3.21),可推出 $\{Tx_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列.因 $\mathbb{R}^n$ 是完备的,故存在 $a=Tx\in\mathbb{R}^n$ 使得 $Tx_m\to a=Tx$,于是 $x_m\to x\in X$.因此 X 是完备的.

现设 X 是赋范线性空间(不一定是有限维的),Y 是 X 的 n 维子空间.要证 Y 是 X 中的闭集,只要证 $\overline{Y}\subset Y$.为此,对任意的 $y\in\overline{Y}$,则存在 $\{y_m\}\subset Y$ 使得 $y_m\to y$.由于收敛序列是 Cauchy 序列且 Y 是完备的,故 $y\in Y$.因此 $\overline{Y}\subset Y$.　　证毕.

注意,赋范线性空间的无限维子空间不一定是完备的,也不一定是闭的.例如,在 Banach 空间 $C[0,1]$ 中,$P[0,1]$ 是 $C[0,1]$ 的无限维子空间.由 § 3.1 例 3.14 可知,$P[0,1]$ 是不完备的,因此不是 $C[0,1]$ 中的闭集.

二、有限维线性空间上范数的等价性

定理 3.30　有限维线性空间上任何两个范数都是等价的,即若 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是有限维线性空间 X 上的两个范数,则存在正数 a 和 b,使得对于每一个 $x\in X$ 都有

$$a\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant b\|x\|_2 \tag{3.24}$$

证明　设 $\dim X=n$,$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的基.分别在 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 上应用定理 3.28,则存在常数 $c_1>0$ 和 $c_2>0$,使得对每一个 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$,分别有

$$c_1\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|_1$$

和

$$\|x\|_2\leqslant c_2\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $a=\frac{c_1}{c_2}$，则从上面两个不等式立即得到

$$a\|x\|_2\leqslant c_1\left(\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|_1.$$

在上面的证明中，若将 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 互换，则可证明(3.24)的另一个不等式成立. 证毕.

由此定理可知，在有限维赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 中，任何序列若在其中一个空间中收敛，则必然在另一个空间中也收敛. 下面举一例说明，有限维线性空间上范数的等价性定理的应用.

例 3.27 设 X 是 n 维赋范线性空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的基，$\{x_m\}$ 是 X 中任一序列，$x_0\in X$. 又设在此基下，x_m 和 x_0 可分别表示为

$$x_m=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(m)}e_i \qquad (m\in\mathbb{N}),$$

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{(0)}e_i.$$

证明：$x_m\to x_0(m\to\infty)$ 的充分必要条件是，对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $\xi_i^{(m)}\to\xi_i^{(0)}(m\to\infty)$.

证明 不妨设 X 是实空间. 仍用定理 3.28 中的记号，对于任意 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\in X$，定义映射

$$Tx=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{R}^n,$$

则 T 是 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性同构映射. 在 $\mathbb{R}^n$ 上选择如下两个范数

$$\|Tx\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|Tx\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|.$$

由定理 3.28，“在 X 上 $x_m\to x_0$”等价于在“$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$ 上 $Tx_m\to Tx_0$”. 由定理 3.30，后一条件又等价于“在 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 上 $Tx_m\to$

Tx_0",即

$$\| Tx_m - Tx_0 \|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(0)}| \to 0.$$

显然,此极限等价于"对每一个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $\xi_i^{(m)}\to\xi_i^{(0)}$".

证毕.

三、有限维赋范线性空间上线性算子的有界性

定理 3.31 有限维赋范线性空间上的线性算子是有界的. 具体地说,若 X 是有限维赋范线性空间,Y 是赋范线性空间,T 是 X 到 Y 的线性算子,则 T 是有界的.

证明 设 $\dim X = n$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 X 的基. 对任意 $x = \sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \in X$,

$$\| Tx \| = \| \sum_{i=1}^{n}\xi_i Te_i \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, \| Te_i \|$$

$$\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \| Te_i \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

又由定理 3.28,存在常数 $c_1>0$ 使得

$$c_1\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \| x \|.$$

令 $r = \frac{1}{c_1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \| Te_i \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$,则

$$\| Tx \| \leqslant rc_1\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant r \| x \|.$$

因此 T 是有界的.

证毕.

最后,应用有限维赋范线性空间上线性算子的有界性来讨论 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $\mathbb{R}^{n\times n}$.

由 §1.2 例 1.12 知,$\mathbb{C}^{n\times n}$ 是所有 $n\times n$ 复方阵的全体组成的线性空间. 而每一个方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,在 $\mathbb{C}^n$ 选定的基下,与一个 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性算子的对应是一个双射(见例 1.19). 因此,可以认为方阵

A 是一个$\mathbb{C}^n$ 到$\mathbb{C}^n$ 的线性算子(或称为线性变换),根据定理3.31,线性算子 A 是有界的. 因此,线性空间$\mathbb{C}^{n\times n}$按照算子范数成为赋范线性空间. 因为$\mathbb{C}^n$ 是完备的,所以$\mathbb{C}^{n\times n}$按照算子范数成为 Banach 空间.

同样,所有 $n\times n$ 实方阵的全体组成的线性空间$\mathbb{R}^{n\times n}$按照算子范数成为 Banach 空间.

§3.8　方阵范数

线性空间$\mathbb{C}^{n\times n}$中的元素 A 是一个 $n\times n$ 复方阵. 可以按两种观点来定义 A 的范数:(1) A 仅看作$\mathbb{C}^{n\times n}$的元素,即一个复 n^2 维空间中的向量,定义它的范数;(2) A 看作$\mathbb{C}^n$ 到$\mathbb{C}^n$ 的线性算子(或称为线性变换),定义它的范数,即算子范数. 由于$\mathbb{C}^{n\times n}$中任意两个方阵 A 和 B 的乘积 $AB\in\mathbb{C}^{n\times n}$,以及任意 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$与任意 $x\in\mathbb{C}^n$ 的乘积 $Ax\in\mathbb{C}^n$,很自然应该讨论方阵的范数是否与二方阵的乘积以及与方阵和向量的乘积相容,即方阵的范数是否满足所谓次乘性.

本节主要讨论方阵范数的定义,并应用方阵范数来研究方阵的谱半径.

一、方阵范数

设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 当$\mathbb{C}^{n\times n}$看作 n^2 维复线性空间时,A 可看作一个 n^2 维复向量,所以可以定义 A 的各种范数,例如

$$\|A\|_m=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|,$$

$$\|A\|_{(p)}=\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\quad(1\leqslant p<\infty),$$

$$\|A\|_F=\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\quad(p=2\text{ 的情况}),$$

$$\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

容易验证，$\mathbb{C}^{n\times n}$关于上述各种范数皆成为赋范线性空间.

设$(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_a)$是一个赋范线性空间，则每一个方阵$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$可以看作$(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_a)$到自身的一个线性算子(线性变换)，并且$A$是一个有界线性算子(见定理3.31). 按照$A$的算子范数

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a}=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|_a, \qquad (3.25)$$

$\mathbb{C}^{n\times n}$是一个Banach空间(见上节末的说明). 此Banach空间$\mathbb{C}^{n\times n}$用以前的记号就是$\mathscr{B}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$. 这时，$\mathbb{C}^{n\times n}$中任意二方阵$A$和$B$的乘积就是它们作为有界线性算子的乘积. 因此，$A$和$B$的乘积$AB$的范数满足

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$$

(见定理3.27)，即满足次乘性. 对于$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$以及$x\in\mathbb{C}^n$，由有界线性算子的定义，也满足

$$\|Ax\|_a\leqslant\|A\|\|x\|_a.$$

综上，在$\mathbb{C}^{n\times n}$上可以赋予各种不同的范数成为赋范线性空间. 为考虑$\mathbb{C}^{n\times n}$上的范数是否与二方阵的乘积以及方阵与向量的乘积相容的问题，给出下面的定义.

定义 3.32 设$(\mathbb{C}^{n\times n},\|\cdot\|)$和$(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_a)$是赋范线性空间.

(1) 若对于任意$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，有

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|,$$

则$\mathbb{C}^{n\times n}$上的范数称为与二方阵乘积相容的方阵范数，简称为**方阵范数**(或矩阵范数).

(2) 若对于任意$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$及任意$x\in\mathbb{C}^n$，有

$$\|Ax\|_a\leqslant\|A\|\|x\|_a,$$

则$\mathbb{C}^{n\times n}$上的范数$\|\cdot\|$称为与向量范数$\|\cdot\|_a$是相容的.

显然，当$\mathbb{C}^{n\times n}$按照算子范数成为Banach空间时，$\mathbb{C}^{n\times n}$上此算

子范数是方阵范数，并且与向量范数是相容的.

例 3.28　若$\mathbb{C}^{n\times n}$中任一方阵 $A=[a_{ij}]$的范数定义为

$$\|A\|_m = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|,$$

$\mathbb{C}^n$ 中任一向量 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$ 的范数定义为

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|,$$

则$\mathbb{C}^{n\times n}$上的范数 $\|\cdot\|_m$不是方阵范数，并且与向量范数 $\|\cdot\|_\infty$不是相容的.

现举一例说明.在$\mathbb{C}^{2\times 2}$中，取

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

则 $\|A\|_m = \|B\|_m = 1$，而

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

于是

$$\|AB\|_m = 2 > 1 = \|A\|_m \|B\|_m,$$

$$\|Ax\|_\infty = 2 > 1 = \|A\|_m \|x\|_\infty.$$

例 3.29　若$\mathbb{C}^{n\times n}$中任一方阵 $A=[a_{ij}]$的范数定义为

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\|\cdot\|_F$ 是方阵范数.此范数 $\|\cdot\|_F$ 常称为 **Frobenius 范数**，简称为 F-范数.下面仅验证 $\|\cdot\|_F$ 与二方阵乘积是相容的.

事实上，对于任意 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，有

$$\begin{aligned}
(\|AB\|_F)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)
\end{aligned}$$

$$= (\| A \|_F)^2 (\| B \|_F)^2.$$

因此$\| AB \|_F \leqslant \| A \|_F \| B \|_F$.

可以证明,范数$\| \cdot \|_F$与$(C^n, \| \cdot \|_2)$中的向量范数$\| \cdot \|_2$是相容的. 事实上,对于任意$A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$及$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in C^n$,

$$\begin{aligned}(\| Ax \|_2)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)\right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right) \\ &= (\| A \|_F)^2 (\| x \|_2)^2.\end{aligned}$$

因此$\| Ax \|_2 \leqslant \| A \|_F \| x \|_2$.

但是,范数$\| \cdot \|_F$不一定与C^n中的其它向量范数都是相容的. 例如考虑$(C^{2\times 2}, \| \cdot \|_F)$及$(C^2, \| \cdot \|_\infty)$,取

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\qquad x=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},$$

则$\| A \|_F=\sqrt{3}$,$\| x \|_\infty=1$,$\| Ax \|_\infty=2$,于是

$$\| Ax \|_\infty = 2 > \sqrt{3} = \| A \|_F \| x \|_\infty.$$

因此,范数$\| \cdot \|_F$与$(C^2, \| \cdot \|_\infty)$中的向量范数$\| \cdot \|_\infty$不是相容的.

一般来讲,对于$C^{n\times n}$上的方阵范数,是否在C^n上存在一个与此方阵范数相容的向量范数?下面的定理回答了此问题.

定理 3.32 若$\| \cdot \|$是$C^{n\times n}$上的方阵范数,则在C^n中存在一个与它相容的向量范数.

证明 取C^n中一个非零向量$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)^T$. 对于任意$x\in C^n$,定义

$$\| x \|_\beta = \| x\beta^T \|,$$

则$(C^n, \|\cdot\|_\beta)$是赋范线性空间. 仅验证三角不等式如下：对于任意 $x,y\in C^n$，注意到 $\|\cdot\|$ 是$C^{n\times n}$上的范数，故

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_\beta &= \|(x+y)\beta^T\| \\
&\leqslant \|x\beta^T\| + \|y\beta^T\| \\
&= \|x\|_\beta + \|y\|_\beta .
\end{aligned}
$$

对于任意 $A\in C^{n\times n}$及 $x\in C^n$，由于方阵范数满足次乘性，则

$$
\begin{aligned}
\|Ax\|_\beta = \|Ax\beta^T\| &\leqslant \|A\|\|x\beta^T\| \\
&= \|A\|\|x\|_\beta .
\end{aligned}
$$

因此，方阵范数 $\|\cdot\|$ 与$(C^n, \|\cdot\|_\beta)$上的向量范数 $\|\cdot\|_\beta$ 是相容的. 证毕.

二、方阵的算子范数

前面已经讨论过，若 $\|\cdot\|_a$ 是C^n 上的范数，对于任意 $A\in C^{n\times n}$，定义 $\|A\|$ 为算子 $A: C^n\to C^n$ 的算子范数(见(3.25)式)，则$(C^{n\times n}, \|\cdot\|)$是 Banach 空间. 此算子范数 $\|\cdot\|$ 是方阵范数，并且与C^n 的向量范数 $\|\cdot\|_a$ 是相容的. $C^{n\times n}$上此算子范数称为关于C^n上的向量范数 $\|\cdot\|_a$ 的算子范数.

对于C^n 上的范数 $\|\cdot\|_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$，有时用附加下标的方法表示 $A\in C^{n\times n}$的算子范数为 $\|A\|_p$. 也就是说，记号 $\|A\|_p$ 可明确表示$C^{n\times n}$上的方阵 A 关于C^n 上的向量范数 $\|\cdot\|_p$ 的算子范数.

通常，$\|\cdot\|_p$ 读作 p-范数. $p=1,\infty$的例子如下.

例 3.30 若赋范线性空间$(C^n, \|\cdot\|_1)$中每一个向量 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$ 的范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|,$$

则每一个 $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$ 关于C^n 上的向量范数 $\|\cdot\|_1$ 的算子范数为

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \tag{3.26}$$

(由于上式右端是方阵 A 的 n 个列向量的1-范数的最大值，所以 $\|A\|_1$ 又称为方阵 A 的**列范数**.)

证明 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，对任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{C}^n$，由

$$Ax=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\xi_j,\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\xi_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\xi_j\right)^T,$$

故

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1&=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||\xi_j|\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(|\xi_j|\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\\&\leqslant\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|\\&=\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\|x\|_1.\end{aligned}$$

因此 $\|A\|_1\leqslant\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

另一方面，对于有限集 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|\,\middle|\,j=1,\cdots,n\right\}$，必存在 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$$

取 $e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T\in\mathbb{C}^n$，即 e_k 为除第 k 个坐标为1以外其余坐标全为零的列向量，则 $\|e_k\|_1=1$，并且

$$\|Ae_k\|_1=\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$$

因此 $\|A\|_1\geqslant\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$. 所以(3.26)式得证.

例 3.31 若赋范线性空间$(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$中每一个向量$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$的范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|,$$

则每一个$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$关于$\mathbb{C}^n$上的向量范数$\|\cdot\|_\infty$的算子范数

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \tag{3.27}$$

(由于上式右端是方阵A的n个行向量的1-范数的最大值,所以$\|A\|_\infty$又称为方阵A的**行范数**.)

证明 设$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$.对任意$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{C}^n$由

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||\xi_j| \\ &\leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j|\right) \\ &= \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

因此$\|A\|_\infty\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

另一方面,存在$k\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \tag{3.28}$$

取$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T\in\mathbb{C}^n$,其中各个$\eta_j$满足

$$\eta_j = \begin{cases}\dfrac{|a_{kj}|}{a_{kj}} & \text{当 } a_{kj}\neq 0 \\ 1 & \text{当 } a_{kj}=0\end{cases} \quad (j=1,\cdots,n),$$

则$\|y\|_\infty=1$,并且由(3.28)有

$$\|Ay\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_j\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

因此 $\|A\|_{\infty} \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

所以(3.27)式得证.

三、方阵的谱半径

定义 3.33 设方阵 $A \in C^{n \times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$. 令

$$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots |\lambda_n|),$$

则称 $\rho(A)$ 为方阵 A 的**谱半径**.

方阵的谱半径在特征值理论中是一个重要的概念. 方阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 与 $C^{n \times n}$ 上定义的所有方阵范数有如下关系.

定理 3.33 设方阵 $A \in C^{n \times n}$, 则

$\rho(A) = \inf\{\|A\| \mid \|\cdot\|$ 是 $C^{n \times n}$ 上的方阵范数$\}$.

证明 (1) 先证明, 对 $C^{n \times n}$ 上任一方阵范数 $\|\cdot\|$, 都有 $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

设 λ 是 A 的任一特征值, x 为 A 对应于 λ 的特征向量, 则

$$Ax = \lambda x.$$

由定理 3.32, 对 $C^{n \times n}$ 上任一方阵范数 $\|\cdot\|$, 在 C^n 上存在一个与它相容的向量范数, 记为 $\|\cdot\|_a$, 于是

$$|\lambda| \, \|x\|_a = \|\lambda x\|_a = \|Ax\|_a \leqslant \|A\| \, \|x\|_a,$$

从而

$$|\lambda| \leqslant \|A\|.$$

因此

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

(2) 再证明, 对任意 $\varepsilon > 0$, 在 $C^{n \times n}$ 上存在一个方阵范数 $\|\cdot\|_*$, 使得

$$\|A\|_* \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

对于方阵 A, 必有可逆矩阵 P, 使得

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ t_1 & \lambda_2 & & & \\ & t_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & t_{n-1} & \lambda_n \end{bmatrix}$$

成为 Jordan 标准形，这里 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 等于 1 或 0，并且

$$|\lambda_i| \leqslant \rho(A) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

令

$$D = \mathrm{diag}(1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \cdots, \varepsilon^{-(n-1)}),$$

显然 D 是可逆矩阵，且

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}).$$

于是

$$D^{-1}JD = D^{-1}P^{-1}APD = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ \varepsilon t_1 & \lambda_2 & & & \\ & \varepsilon t_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \varepsilon t_{n-1} & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

对于任意 $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$，定义

$$\| B \|_* = \| D^{-1}P^{-1}BPD \|_\infty.$$

容易验证 $\| \cdot \|_*$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的方阵范数. 对于方阵范数 $\| \cdot \|_\infty$，由例 3.31 可得

$$\begin{aligned} \| A \|_* &= \| D^{-1}P^{-1}APD \|_\infty \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| + \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \varepsilon |t_i| \\ &\leqslant \rho(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

综合(1)和(2)，则此定理得证.

借助于方阵的谱半径来求 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的算子范数 $\| \cdot \|_2$.

例 3.32 若赋范线性空间$(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$中每一个向量$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)^T$的范数

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则每一个$A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$关于$\mathbb{C}^n$上的向量范数$\|\cdot\|_2$的算子范数

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}.$$

证明 由于A^HA是Hermite矩阵,它对应的Hermite二次型

$$f(x)=x^H(A^HA)x=(Ax)^HAx\geqslant 0,$$

即它是正定或半正定的,因此A^HA的n个特征值都大于或等于零,不妨设这n个特征值为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0,$$

又设$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别是对应于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的相互正交的单位特征向量,则$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$\mathbb{C}^n$的基.

对任意$x\in\mathbb{C}^n$且$\|x\|_2=1$, x可表示为

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n.$$

由于

$$\begin{aligned}A^HAx&=\alpha_1A^HAx_1+\alpha_2A^HAx_2+\cdots+\alpha_nA^HAx_n\\&=\alpha_1\lambda_1x_1+\alpha_2\lambda_2x_2+\cdots+\alpha_n\lambda_nx_n,\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}(\|Ax\|_2)^2=(Ax)^HAx=x^H(A^HAx)&\\=\lambda_1|\alpha_1|^2+\lambda_2|\alpha_2|^2+\cdots+\lambda_n|\alpha_n|^2&\\\leqslant\lambda_1(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_n|^2)&\\=\lambda_1.&\end{aligned}$$

因此$\|A\|_2\leqslant\sqrt{\lambda_1}$.另一方面,当$x=x_1$时$\|x\|_2=1$,并且

$$(\|Ax_1\|_2)^2=(Ax_1)^HAx_1=x_1^HA^HAx_1=\lambda_1,$$

即$\|Ax_1\|_2=\sqrt{\lambda_1}$.故$\|A\|_2\geqslant\sqrt{\lambda_1}$.综上,得到

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\rho(A^HA)}.$$ 证毕.

注 前面的三个例子分别给出了方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的三种算子范数 $\|A\|_1$，$\|A\|_\infty$ 和 $\|A\|_2$. 由于 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是有限维的，因此 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上赋予的任何两个范数都是等价的，于是方阵序列在一个范数下收敛等价于它在另一个范数下收敛. 这样，可以按照在计算上或理论上不同的需要选用不同的算子范数. 一般来讲，方阵 A 的算子范数 $\|A\|_1$ 和 $\|A\|_\infty$ 常用在计算上. 如果把 $\mathbb{C}^n$ 看作为内积空间(其上内积的定义见例 1.21)，$\mathbb{C}^n$ 上由内积导出的范数是 $\|\cdot\|_2$，因此方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的算子范数也可以看作从内积空间 $\mathbb{C}^n$ 到自身的算子范数. 虽然在计算上 $\|A\|_2$ 不如 $\|A\|_1$ 和 $\|A\|_\infty$ 方便，但是在理论证明中 $\|A\|_2$ 有许多用处.

有关方阵 A 的算子范数的一些性质，列在下面的定理中.

定理 3.34 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则下列结论成立.

(1) $\|A\|_2=\|A^H\|_2=\|A^T\|_2=\|\overline{A}\|_2$；

(2) $\|A^HA\|_2=\|AA^H\|_2=(\|A\|_2)^2$；

(3) 对任意 $n\times n$ 酉矩阵 U 和 V，有

$$\|UA\|_2=\|AV\|_2=\|UAV\|_2=\|A\|_2.$$

证明 (1)和(2)见下一节定理 3.43 的证明.

(3) 由算子范数 $\|\cdot\|_2$ 的表示式(见例 3.32)，

$$\begin{aligned}(\|UA\|_2)^2&=\rho((UA)^HUA)=\rho(A^HU^HUA)\\&=\rho(A^HA)=(\|A\|_2)^2.\end{aligned}$$

又由相似矩阵的性质，

$$\begin{aligned}(\|AV\|_2)^2&=\rho((AV)^HAV)=\rho(V^HA^HAV)\\&=\rho(V^{-1}A^HAV)=\rho(A^HA)\\&=(\|A\|_2)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\|UA\|_2=\|AV\|_2=\|A\|_2,$$

$$\|UAV\|_2=\|AV\|_2=\|A\|_2.$$

§3.9 有界线性泛函

设 X 是数域$\mathbb{K}$上的线性空间. 若 $f: X\to\mathbb{K}$ 是线性算子,则 f 称为 X 上的**线性泛函**. 当$\mathbb{K}=\mathbb{R}$时,f 称为实线性泛函;当$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时,f 称为复线性泛函.

在本节中,将研究有界线性泛函、对偶空间、二次对偶空间和伴随算子的概念及有关的性质,在 Hilbert 空间中有界线性泛函的 Riesz 表示定理.

一、有界线性泛函和 Hahn-Banach 定理

设 X 是数域$\mathbb{K}$上的赋范线性空间. 若 $f: X\to\mathbb{K}$ 是有界线性算子,则 f 称为 X 上的**有界线性泛函**.

由§3.6 中的定义 3.30,f 是 X 上的有界线性泛函,就是说,存在常数 $c>0$,使得对一切 $x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant c\|x\|.$$

类似于定义 3.31,对于有界线性泛函 f,令

$$\|f\|=\sup_{x\in X,x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

则 $\|f\|$ 称为有界线性泛函 f 的范数.

由引理 3.8,有界线性泛函 f 的范数还可以表示为

$$\|f\|=\sup_{x\in X,\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{x\in X,\|x\|\leqslant 1}|f(x)|.$$

当 f 是有界线性泛函时,对每一个 $x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|.$$

类似于定理 3.23,可以得到如下结论:赋范线性空间上的线性泛函 f 是连续的,当且仅当 f 是有界的.

下面介绍关于有界线性泛函扩张的 Hahn-Banach 定理. 它是赋范线性空间和 Banach 空间理论的一个重要定理.

定理 3.35(Hahn-Banach) 若 M 是赋范线性空间 X 的子空间,f 是 M 上的有界线性泛函,则存在一个 X 上的有界线性泛函 F,满足

(1) F 是 f 在 X 上的扩张,即对一切 $x\in M$ 有 $F(x)=f(x)$;

(2) $\|F\|_X=\|f\|_M$,这里 $\|F\|_X$ 表示 F 作为 X 上的有界线性泛函的范数,$\|f\|_M$ 表示 f 作为 M 上的有界线性泛函的范数.

证明需要用到选择公理等知识,故略去.

应用定理 3.35,可得到下面的推论.定理 3.35 以及它的推论通常统称为 Hahn-Banach 定理.

推论 1 若 M 是赋范线性空间 X 的子空间,$x_0\in X\setminus M$,且

$$h=d(x_0,M)=\inf_{x\in M}\|x_0-x\|>0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f,满足

(1) 对每一个 $x\in M$,$f(x)=0$;

(2) $f(x_0)=h$;

(3) $\|f\|=1$.

证明略.

推论 2 设 X 是赋范线性空间,$0\neq x\in X$,则存在 X 上的有界线性泛函 f,满足

(1) $f(x_0)=\|x_0\|$;

(2) $\|f\|=1$.

证明 由推论 1,令 $M=\{0\}$,则可立即得证.

推论 3 设 X 是赋范线性空间,则对每一个 $x\in X$,x 的范数可表示为

$$\|x\|=\sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|f\|}\,\middle|\,f\text{ 是 }X\text{ 上的有界线性泛函且 }f\neq 0\right\},$$

因而,若对 X 上的一切有界线性泛函 f 都有 $f(x)=0$,则 $x=0$.

证明 将欲证的等式简记为

$$\|x\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

当 $x=0$ 时,结论显然成立.现设 $x\neq 0$.对于 X 上的任意有界线性泛函 f,由于

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|,$$

则当 $f\neq 0$ 时,得到

$$\|x\| \geqslant \sup \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

另一方面,由于 $x\neq 0$,应用推论 2,存在 X 上的有界线性泛函 f_0 满足

$$f_0(x)=\|x\|,\text{且}\|f_0\|=1.$$

于是

$$\sup \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geqslant \frac{f_0(x)}{\|f_0\|} = \|x\|.$$

综上,则欲证的等式成立.

二、对偶空间

应用定理 3.25 的结论,可给出下面的定义.

定义 3.34 设 X 是赋范线性空间,X 上所有有界线性泛函的全体组成的赋范线性空间 $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ 称为 X 的**对偶空间**,或称为共轭空间,记为 X^*,即 $X^*=\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$,对于每一个 $f\in X^*$,f 的范数为

$$\|f\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

由于$\mathbb{R}$ 和$\mathbb{C}$ 都是完备的,应用定理 3.26 可得到下面的结论.

定理 3.36 赋范线性空间 X 的对偶空间 X^* 是 Banach 空间.

按照等距同构的概念(见定义 3.7),两个等距同构的赋范线性空间 X 和 Y,在等距同构的意义下,可以记为 $X=Y$.这一认识将应用于下面的例子中.

例 3.33 $\mathbb{C}^n$ 的对偶空间是$\mathbb{C}^n$,即在等距同构的意义下$(\mathbb{C}^n)^*=\mathbb{C}^n$.

证明 取$\mathbb{C}^n$ 的基$\{e_1,\cdots,e_n\}$,其中 e_i 的坐标除第 i 个为 1 以外其余全为零$(i=1,\cdots,n)$. 对于任意 $f\in X^*$,令

$$\alpha_i = f(e_i) \qquad (i = 1,\cdots,n).$$

于是,对于任意 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \in \mathbb{C}^n$, 有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i. \tag{3.29}$$

令 $a=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T$,则 $a\in\mathbb{C}^n$ 且 a 由 f 所唯一确定.

另一方面,对于每一个 $a=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T\in\mathbb{C}^n$,由(3.29)式可定义一个$\mathbb{C}^n$ 上的线性泛函 f. 因此,映射 $f\mapsto a$ 是$(\mathbb{C}^n)^*$到$\mathbb{C}^n$ 上的映射,并且显然是线性的. 现在证明此映射保持范数. 对于任意 $x\in X^*$, $f(x)$由(3.29)式表示,应用 Hölder 不等式($p=2$ 的情况),得到

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i\alpha_i|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|a\|\,\|x\|,$$

故 $\|f\|\leqslant\|a\|$. 另一方面,取 $x_0=\bar{a}$,则

$$|f(x_0)|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2=\|a\|\,\|x_0\|,$$

故 $\|f\|\geqslant\|a\|$. 因此 $\|f\|=\|a\|$. 这就证明了,映射 $f\mapsto a$ 是$(\mathbb{C}^n)^*$到$\mathbb{C}^n$ 上的线性映射、保持范数并且是双射. 因此,$(\mathbb{C}^n)^*$与$\mathbb{C}^n$是等距同构的.

类似地,可以证明$(\mathbb{R}^n)^*=\mathbb{R}^n$.

例 3.34 l^1 的对偶空间是 l^∞,即$(l^1)^*=l^\infty$.

证明 取 l^1 的基$\{e_1,e_2,\cdots\}$,其中 e_i 的坐标除第 i 个为 1 外其余全为零$(i\in\mathbb{N})$. 对于任意 $f\in(l^1)^*$,令

$$\alpha_i = f(e_i) \quad (i \in N).$$

由于 f 是线性和连续的，则对于任意 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i \in l^1$，有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i \alpha_i. \tag{3.30}$$

令 $a=(\alpha_1,\alpha_2\cdots)$. 对每一个 $i\in N$，由于 $\|e_i\|_1=1$，则

$$|\alpha_i| = |f(e_i)| \leqslant \|f\| \ \|e_i\|_1 = \|f\|,$$

故 $a\in l^\infty$. 因此，a 由 f 所唯一确定，并且

$$\|a\|_\infty \leqslant \|f\|. \tag{3.31}$$

另一方面，对于任意 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^\infty$，由(3.30)式可定义一个 l^1 上的线性泛函 f. 由于

$$|f(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\alpha_i| \leqslant \left(\sup_{i\geqslant 1}|\alpha_i|\right)\sum_i|\xi_i| = \|a\|_\infty \|x\|_1,$$

则 f 是有界的，并且

$$\|f\| \leqslant \|a\|_\infty. \tag{3.32}$$

由不等式(3.31)和(3.32)得到 $\|f\| = \|a\|_\infty$. 因此，映射 $f\mapsto a$ 是 $(l^1)^*$ 到 l^∞ 上的等距同构映射，即 $(l^1)^*$ 与 l^∞ 是等距同构的.

例 3.35 l^p 的对偶空间是 l^q $\left(1<p<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，即 $(l^p)^*=l^q$.

证明 取 l^p 的基 $\{e_1,e_2,\cdots\}$，其中 e_i 的坐标除第 i 个为 1 以外其余全为零$(i\in N)$. 对于任意 $f\in(l^p)^*$，令

$$\alpha_i = f(e_i) \quad (i\in N).$$

由于 f 是线性和连续的，则对于任意 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\in l^p$，有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i. \tag{3.33}$$

令 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$. 先证明 $a\in l^q$. 为此，取一点列 $\{x_n\}$：

$$x_n = (\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots) \quad (n\in N),$$

其中

$$\xi_i^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{|\alpha_i|^q}{\alpha_i} & 当\ i\leqslant n\ 且\ \alpha_i\neq 0\\ 0 & 当\ i>n\ 或\ \alpha_i=0\end{cases},$$

则

$$f(x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(n)}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q.$$

注意到 $pq-p=q$，有

$$\begin{aligned}f(x_n)=|f(x_n)|&\leqslant\|f\|\ \|x_n\|_p\\&=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^{pq-p}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

综合上面二式，得到

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q=f(x_n)\leqslant\|f\|\,(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q)^{\frac{1}{p}},$$

从而

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|.$$

由于上式对任意的 n 成立，令 $n\to\infty$，则得到

$$\|a\|_q=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|,\tag{3.34}$$

同时也证明了 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^q$.

另一方面，对于任意 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^q$，由(3.33)式可定义一个 l^p 上的线性泛函 f. 由 Hölder 不等式

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\,\alpha_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|a\|_q \|x\|_p,$$

则 f 是有界的，并且

$$\|f\| \leqslant \|a\|_q. \tag{3.35}$$

由不等式(3.34)和(3.35)得到 $\|f\| = \|a\|_q$. 因此，映射 $f \mapsto a$ 是 $(l^p)^*$ 到 l^q 上的等距同构映射，即 $(l^p)^*$ 与 l^q 是等距同构的.

例 3.36 $(L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 当 $p = 1$ 时令 $q = \infty)$.

证明从略. 这里仅指出，在 $(L^p[a,b])^*$ 到 $L^q[a,b]$ 的等距同构映射下，$f \in (L^p[a,b])^*$ 对应于 $y \in L^q[a,b]$，使得对于任意 $x \in L^p[a,b]$，

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

三、二次对偶空间和自反空间

定义 3.35 设 X 是赋范线性空间，X 的对偶空间 X^* 是 Banach空间(见定理 3.36)，X^* 的对偶空间记为 X^{**}，即

$$X^{**} = (X^*)^*,$$

则 X^{**} 称为 X 的**二次对偶空间**，或称为二次共轭空间.

下面研究 X 与 X^{**} 之间的关系. 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间. 取 $x \in X$，定义泛函 $F_x : X^* \to \mathbb{K}$，使得对每一个 $f \in X^*$

$$F_x(f) = f(x) \in \mathbb{K}. \tag{3.36}$$

易知 F_x 是线性的. 下面的定理指出，F_x 是 X^* 上的有界线性泛函.

定理 3.37 设 X 是赋范线性空间，$x \in X$，则由(3.36)式定义的线性泛函 F_x 是 X^* 上的有界线性泛函，即 $F_x \in X^{**}$ 并且

$$\|F_x\| = \|x\|.$$

证明 应用定理 3.35 的推论 3，立即得到

$$\|F_x\| = \sup_{f \in X^*, f \neq 0} \frac{|F_x(x)|}{\|f\|}$$

$$= \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|.$$ 证毕.

由上述定理,又可定义一个映射 $\Phi: X\to X^{**}$,使得对每一个 $x\in X$

$$\Phi x = F_x.$$

映射 Φ 称为 X 到 X^{**} 的**典范映射**,或称为自然映射. 映射 Φ 是线性的,因为对每一个 $f\in X^*$,

$$F_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
$$= (\alpha F_x + \beta F_y)(f)$$

(其中 $x,y\in X$, $\alpha,\beta\in \mathbb{K}$),故

$$\Phi(\alpha x + \beta y) = F_{\alpha x+\beta y} = \alpha F_x + \beta F_y$$
$$= \alpha\Phi x + \beta\Phi y.$$

由定理 3.37 知,映射 Φ 保持范数. 归纳起来,已经证明了下面定理.

定理 3.38　赋范线性空间 X 到 X^{**} 的典范映射 Φ 是 X 到 X^{**} 的子空间 $\Phi(X)$ 上的等距同构映射.

在等距同构的意义下,可记 $X=\Phi(X)\subset X^{**}$ 或者 $X\subset X^{**}$.

一般来说,典范映射 Φ 不一定是满射,即 $\Phi(X)$ 可能是 X^{**} 的真子空间,当 Φ 是满射时,得到下面的定义.

定义 3.36　若赋范线性空间 X 上的典范映射 Φ 是满射,即 $\Phi(X)=X^{**}$,则 X 称为是**自反的**.

例如,$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$, $l^p(1<p<\infty)$ 和 $L^p[a,b](1<p<\infty)$ 都是自反的. 可以证明, $C[a,b]$, l^1 和 l^∞ 都不是自反的.

四、Hilbert 空间上有界线性泛函的表示

在内积空间 X 中,取定 $u\in X$,则可定义一个 X 上的线性泛函 f_u,使得对每一个 $x\in X$

$$f_u(x) = \langle x,u\rangle.$$

由 Schwarz 不等式

$$|f_u(x)|=|\langle x,u\rangle|\leqslant\|x\|\|u\|,$$

则 f_u 是有界的，并且 $\|f_u\|\leqslant\|u\|$. 另一方面，若取 $x=u$，得

$$|f_u(u)|=\langle u,u\rangle=\|u\|^2,$$

则 $\|f_u\|\geqslant\|u\|$. 因此 $\|f_u\|=\|u\|$.

反之，对于任意 $f\in X^*$，是否存在 $u\in X$ 使得 $f=f_u$? 当 X 是 Hilbert 空间时，下面的定理对此问题做了肯定的回答.

定理 3.39(Riesz 表示定理) 设 H 是 Hilbert 空间，f 是 H 上的一个有界线性泛函，则存在唯一的 $u\in H$，使得对每一个 $x\in H$，有

$$f(x)=\langle x,u\rangle,$$

并且 $\|f_u\|=\|u\|$.

证明略.

设 H 是 Hilbert 空间，H^* 是它的对偶空间. 定义映射

$$J: H\to H^*,$$

使得对每一个 $u\in H$，

$$Ju=f_u\in H^*,$$

即对每一个 $x\in H$，

$$(Ju)(x)=f_u(x)=\langle x,u\rangle.$$

由 Riesz 表示定理，J 是双射且保持范数.

容易验证，J 是**共轭线性算子**，即对任意 $u,v\in H$ 及 $\alpha\in\mathbb{K}$，

$$J(u+v)=Ju+Jv\ (\text{或 } f_{u+v}=f_u+f_v),$$

$$J(\alpha u)=\bar{\alpha}Ju\ (\text{或 } f_{\alpha u}=\bar{\alpha}f_u).$$

例如验证 $J(\alpha u)=\bar{\alpha}Ju$ 成立. 这是因为对每一个 $x\in H$

$$\begin{aligned}(J(\alpha u))(x)&=f_{\alpha u}(x)=\langle x,\alpha u\rangle\\&=\bar{\alpha}\langle x,u\rangle=\bar{\alpha}f_u(x)\\&=\bar{\alpha}(Ju)(x).\end{aligned}$$

当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时，J 称为 H 到 H^* 上的**复共轭同构映射**. 当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时，$\bar{\alpha}=\alpha$，J 是 H 到 H^* 上的**同构映射**.

五、伴随算子

在此段中，将分别介绍赋范线性空间上的伴随算子和 Hilbert 空间上的伴随算子的定义.

设 X 和 Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 对任意 $g\in Y^*$，令 $\hat{g}=gT$，即对每一个 $x\in X$

$$\hat{g}=g(Tx),$$

则 $\hat{g}$ 是 X 上的线性泛函. 由于

$$|\hat{g}(x)|=|g(Tx)|\leqslant\|g\|\|T\|\|x\|, \tag{3.37}$$

故 $\hat{g}$ 是有界的，从而 $\hat{g}\in X^*$，并且 $\|\hat{g}\|\leqslant\|g\|\|T\|$. 当 g 在 Y^* 中变动时，$g\mapsto\hat{g}$ 是一个 Y^* 到 X^* 的映射，记为 $T^\times$. 其具体定义如下.

定义 3.37 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 定义映射 $T^\times: Y^*\to X^*$，使得对每一个 $g\in Y^*$

$$T^\times g=gT,$$

或者说，对每一个 $x\in X$，有

$$(T^\times g)(x)=g(Tx),$$

则 $T^\times$ 称为 T 的**伴随算子**，或称为 T 的共轭算子.

下面以有限维赋范线性空间为例，说明赋范线性空间上的伴随算子的定义可理解为转置矩阵的概念的推广.

例 3.37 设 $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 是线性算子，因此 T 是有界的，当 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 的基选定以后，由例 1.19 知，T 对应于一个唯一的 $m\times n$ 矩阵 A：

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

由例 3.33 知，$(\mathbb{C}^m)^*=\mathbb{C}^m$，即每一个 $g\in(\mathbb{C}^m)^*$ 对应于 $b=(\beta_1,\cdots,\beta_m)^T\in\mathbb{C}^m$，使得对每一个 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_m)^T\in\mathbb{C}^m$

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \beta_i.$$

因此,对每一个 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T \in \mathbb{C}^n$, $g(Tx)$对应的矩阵运算为

$$b^T A x = [\beta_1,\cdots,\beta_m][a_{ij}]\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}.$$

设 $T^\times$对应的矩阵为 $A^\times$,则$(T^\times g)(x)$对应的矩阵运算为

$$(A^\times b)^T x = b^T (A^\times)^T x.$$

由伴随算子的定义,$g(Tx)=(T^\times g)(x)$,其对应的矩阵运算应满足

$$b^T A x = b^T (A^\times)^T x.$$

所以 $A=(A^\times)^T$,即 $A^\times = A^T$. 这表明,若有界线性算子 T 对应的矩阵是 A,则 T 的伴随算子 $T^\times$对应的矩阵是 A 的转置矩阵 A^T.

赋范线性空间上的伴随算子具有如下性质.

定理 3.40 设 X 和 Y 是赋范线性空间,则 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$的伴随算子 $T^\times \in \mathscr{B}(Y^*,X^*)$并且

$$\|T^\times\| = \|T\|.$$

证明 显然 $T^\times: Y^* \to X^*$是线性算子. 由(3.37)式得

$$\|T^\times g\| = \|\hat{g}\| \leqslant \|T\|\|x\|,$$

故 $T^\times$是有界的,且 $\|T^\times\| \leqslant \|T\|$. 另一方面,由 Hahn-Banach 定理,对于 $x\in X$,若 $Tx\neq 0$,则存在 $g_0 \in Y^*$ 使得

$$\|g_0\| = 1,\ g_0(Tx) = \|Tx\|,$$

于是

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= |g_0(Tx)| = |(T^\times g_0)(x)| \\ &\leqslant \|T^\times\|\|g_0\|\|x\| = \|T^\times\|\|x\|.\end{aligned}$$

对于满足 $Tx=0$ 的 x,上式仍然成立,故 $\|T\| \leqslant \|T^\times\|$. 因此 $\|T^\times\| = \|T\|$ 得证.

设 X,Y 和 Z 都是赋范线性空间,若 $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(X,Y)$, $T_3 \in$

$\mathscr{B}(Y,Z)$，$\alpha\in\mathbb{K}$，则容易证明下列运算法则成立：

(1) $(T_1+T_2)^{\times}=T_1^{\times}+T_2^{\times}$；

(2) $(\alpha T_1)^{\times}=\alpha T_1^{\times}$；

(3) $(T_3T_2)^{\times}=T_2^{\times}T_3^{\times}$.

上面讨论的伴随算子是关于赋范线性空间而言的. 下面讨论的伴随算子是关于 Hilbert 空间而言的，它与空间的内积有关.

定理 3.41　设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(H_1,H_2)$，则存在唯一的 $T^*\in\mathscr{B}(H_2,H_1)$，使得对于每一个 $x\in H_1$，$y\in H_2$

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$$

成立，并且

$$\|T^*\|=\|T\|.$$

证明　对于每一个 $y\in H_2$，令

$$h_y(x)=\langle Tx,y\rangle\quad(x\in H_1).$$

应用 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}|h_y(x)|=|\langle Tx,y\rangle|&\leqslant\|Tx\|\|y\|\\&\leqslant\|T\|\|y\|\|x\|,\end{aligned}$$

故 h_y 是 H_1 上的有界线性泛函，并且 $\|h_y\|\leqslant\|T\|\|y\|$. 由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $u\in H_1$，使得

$$\langle Tx,y\rangle=h_y(x)=\langle x,u\rangle,\tag{3.38}$$

并且 $\|h_y\|=\|u\|$. 定义映射 $T^*:H_2\to H_1$，使得 $T^*y=u$ $(y\in H_2)$. 这样，(3.38)式变为

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle\quad(x\in H_1,y\in H_2).$$

现在证明 $T^*\in\mathscr{B}(H_2,H_1)$. 事实上，对于任意 $y,z\in H_2$ 及任意数 α,β，下式

$$\begin{aligned}\langle x,T^*(\alpha y+\beta z)\rangle&=\langle Tx,\alpha y+\beta z\rangle\\&=\bar{\alpha}\langle Tx,y\rangle+\bar{\beta}\langle Tx,z\rangle\\&=\bar{\alpha}\langle x,T^*y\rangle+\bar{\beta}\langle x,T^*z\rangle\\&=\langle x,\alpha T^*y+\beta T^*z\rangle\end{aligned}$$

对任意 $x\in H_1$ 成立，故（应用习题一第 11 题的结论）

$$T^*(\alpha y+\beta z)=\alpha T^*y+\beta T^*z.$$

因此 T^* 是线性的.

由 T^* 的定义，对于任意 $y\in H_2$，有

$$\|T^*y\|=\|h_y\|\leqslant\|T\|\|y\|,$$

故 $T^*\in\mathscr{B}(H_2,H_1)$，并且 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$.

另一方面，对于任意 $x\in H_1, y\in H_2$，又有

$$\begin{aligned}|\langle Tx,y\rangle|&=|\langle x,T^*y\rangle|\\&\leqslant\|x\|\|T^*y\|\\&\leqslant\|T^*\|\|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

若取 $y=Tx$，则

$$\|Tx\|^2\leqslant\|T^*\|\|x\|\|Tx\|,$$

从而 $\|Tx\|\leqslant\|T^*\|\|x\|$，故 $\|T\|\leqslant\|T^*\|$.

因此 $\|T^*\|=\|T\|$.

唯一性. 若又有 $S\in\mathscr{B}(H_2,H_1)$ 满足

$$\langle x,Sy\rangle=\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$$

对于任意 $x\in H_1, y\in H_2$ 成立，则

$$Sy=T^*y$$

对于任意 $y\in H_2$ 成立. 因此 $S=T^*$. 证毕.

由此定理，可给出下面的定义.

定义 3.38 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(H_1,H_2)$. 由定理 3.41，存在唯一的 $T^*\in\mathscr{B}(H_2,H_1)$ 满足

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle\quad(x\in H_1, y\in H_2).$$

T^* 称为 T 的 **Hilbert 伴随算子**，简称为伴随算子或共轭算子.

下面以有限维赋范线性空间为例，说明 Hilbert 伴随算子的定义可理解为共轭转置矩阵的概念的推广.

例 3.38 设 $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 是线性算子，因此 T 是有界的. 当 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 的基选定以后，由例 1.19 知，T 对应于一个唯一的 $m\times n$ 矩

阵 A：

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

对于任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)^T\in\mathbb{C}^n$，$x$ 与 z 的内积

$$\langle x,z\rangle = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\zeta_i} = x^T\overline{z}.$$

对于任意 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_m)^T\in\mathbb{C}^m$，内积 $\langle Tx,y\rangle$ 对应的矩阵运算为

$$(Ax)^T\overline{y}=x^TA^T\overline{y}.$$

设 T 的 Hilbert 伴随算子 T^* 对应的矩阵为 A^*，则内积 $\langle x,T^*y\rangle$ 对应的矩阵运算为

$$x^T\overline{A^*y}=x^T\overline{A^*}\overline{y}.$$

由于 $\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$，其对应的矩阵运算应满足

$$x^TA^T\overline{y}=x^T\overline{A^*}\overline{y},$$

所以 $A^T=\overline{A^*}$. 因 A^H 表示 A 的共轭转置矩阵，则

$$A^* = (\overline{A})^T = A^H.$$

这表明，若有界线性算子 T 对应的矩阵是 A，则 T 的 Hilbert 伴随算子 T^* 对应的矩阵是 A 的共轭转置矩阵 A^H.

比较例 3.37 和例 3.38 可看出，有界线性算子 $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 的两种伴随算子 $T^\times$ 和 T^* 之间的差异. $T^\times$ 对应的矩阵为 T 对应的矩阵的转置矩阵，而 T^* 对应的矩阵为 T 对应的矩阵的共轭转置矩阵. 仅对于有界线性算子 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$T^\times$ 和 T^* 对应的矩阵才相等.

还应注意，在 Hilbert 伴随算子的定义中，要求空间的完备性条件.

Hilbert 伴随算子具有如下性质.

定理 3.42 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间，$T,S\in\mathscr{B}(H_1,$

$H_2)$，$\alpha \in \mathbb{K}$，则下列结论成立：

(1) $(T+S)^*=T^*+S^*$；

(2) $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$；

(3) $(T^*)^*=T$；

(4) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$；

(5) 若 $T^*T=0$，则 $T=0$；

(6) 当 $H_1=H_2$ 时 $(TS)^*=S^*T^*$.

证明 只证明(4)，其余留给读者作为习题.

应用 Schwarz 不等式，对任意 $x\in H_1$，可得

$$\|Tx\|^2=\langle Tx,Tx\rangle=\langle x,T^*Tx\rangle$$
$$\leqslant \|x\|\|T^*Tx\|\leqslant \|T^*T\|\|x\|^2,$$

于是

$$\|T\|^2\leqslant \|T^*T\|\leqslant \|T^*\|\|T\|=\|T\|^2.$$

因此 $\|T^*T\|=\|T\|^2$. 又由(3)得到

$$\|TT^*\|=\|T^{**}T^*\|=\|T^*\|^2=\|T\|^2.$$ 证毕.

现在应用伴随算子的理论来研究有限维赋范线性空间$(\mathbb{C}^{n\times n},\|\cdot\|_2)$，其中每一个方阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可看作$(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_2)$到自身的有界线性算子，并且 A 的算子范数

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^HA)}$$

(见上一节的例 3.32). 注意到$(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|_2)$中向量 x 的范数 $\|x\|_2$ 是由$\mathbb{C}_n$ 的内积导出的范数，即 $\|x\|_2=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. 由例3.37和例 3.38 知，$A^T$ 和 A^H 分别是 A 在赋范线性空间上的伴随算子和 A 的 Hilbert 伴随算子. 应用定理 3.40、定理 3.41 和定理3.42，立即可得到下面的定理的结论，也就是上一节定理 3.34 中的结论(1)和(2).

定理 3.43 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则下列结论成立：

(1) $\|A\|_2=\|A^T\|_2=\|A^H\|_2=\|\bar{A}\|_2$；

(2) $\| A^H A \|_2 = \| AA^H \|_2 = (\| A \|_2)^2$.

证明 (1) 由定理 3.40 和定理 3.41,得到

$$\| A \|_2 = \| A^T \|_2 = \| A^H \|_2.$$

又

$$\| A \|_2 = \| A^H \|_2 = \| (A^H)^T \|_2 = \| \overline{A} \|_2.$$

(2) 由定理 3.42(4)得证.

习 题 三

1. 在线性空间R^n中,对于 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T \in R^n$,定义

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|,$$

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|,$$

验证$\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$和$\| \cdot \|_\infty$都是R^n上的范数.

2. 在线性空间 $C[a,b]$中,对于 $x \in C[a,b]$,定义

$$\| x \|_1 = \int_a^b |x(t)| \mathrm{d}t,$$

验证$\| \cdot \|_1$是$C[a,b]$上的范数.

3. 设 X,Y 和 Z 都是赋范线性空间(或度量空间). 若 $f: X \to Y$ 与$g: Y \to Z$都是连续映射,证明 $h = g \cdot f$ 是 X 到 Z 的连续映射.

4. 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间. 若映射 $f: X \to Y$ 保持范数,即对每一个 $x \in X$

$$\| fx \| = \| x \|,$$

证明 f 是单射.

5. 证明赋范线性空间(或度量空间)中任一 Cauchy 序列的点构成的集合是有界集.

6. 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是赋范线性空间 X 中的任意两个 Cauchy 序列,证明数列$\{\| x_n - y_n \|\}$收敛.

7. 证明赋范线性空间 l^∞ 是完备的，这里 l^∞ 中任意元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 的范数 $\|x\|_\infty$ 定义为

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in N}|\xi_i|.$$

8. 证明 $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 是完备的，这里 $\mathbb{R}^n$ 中任意元素 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的范数 $\|x\|_\infty$ 定义为

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|.$$

9. 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个等价范数，$\{x_n\}$ 是 X 中的序列. 证明：

(1) $\{x_n\}$ 是 $(X,\|\cdot\|_1)$ 中的 Cauchy 序列，当且仅当 $\{x_n\}$ 是 $(X,\|\cdot\|_2)$ 中的 Cauchy 序列；

(2) $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛于 x，当且仅当 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|_2$ 收敛于 x.

10. 设 A 是赋范线性空间（或度量空间）X 的子集，证明：A 是 X 中的开集，当且仅当 A 是一族开球之并.

11. 设 Y 是赋范线性空间 X 的子空间，证明 Y 的闭包 $\overline{Y}$ 也是 X 的子空间.

12. 设 f 和 g 是赋范线性空间（或度量空间）X 上的实值连续泛函，A 为 X 的稠密子集. 若对每一个 $x\in A$ 有 $f(x)\leqslant g(x)$，则对每一个 $x\in X$ 也有 $f(x)\leqslant g(x)$.

13. 设 X 和 Y 是赋范线性空间（或度量空间），$f: X\to Y$ 是连续映射且 $f(X)=Y$. 若 A 在 X 中稠密，证明 $f(A)$ 在 Y 中稠密.

14. 设 (X,d) 是度量空间，证明对于任意 $x,y,x_1,y_1\in X$

$$|d(x,y)-d(x_1,y_1)|\leqslant d(x,x_1)+d(y,y_1).$$

15. 证明：

(1) 有限多个紧集的并是紧集；

(2) 任意多个紧集的交是紧集.

16. 证明任何一个紧空间都是完备的.

17. 若 $C^1[0,1]$ 中任一元素 x 的范数定义为

$$\|x\|_d = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|$$

并且 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 上的微分算子 D 定义为

$$(Dx)(t)=\frac{dx(t)}{dt}\quad (x\in C^1[0,1]).$$

证明 D 是有界线性算子.

18. 对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,定义 l^2 上的左移算子 T_n 为

$$T_n x=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots),$$

证明线性算子 $T_n: l^2\to l^2$ 是有界的,且 $\|T_n\|=1$.

19. 在实赋范线性空间 $C[a,b]$上定义泛函 f,使得对任意 $x\in C[a,b]$

$$f(x)=x(t_0),$$

其中 t_0 是闭区间$[a,b]$上的固定点. 证明 f 是有界线性泛函,并求 f 的范数 $\|f\|$.

20. 设 X 和 Y 是线性空间,$T: X\to Y$ 是线性算子,且 T 是满射. 证明:

(1) $T^{-1}: Y\to X$ 存在的充分必要条件是,若 $Tx=0$,则必有 $x=0$;

(2) 若 T^{-1}存在,则 T^{-1}也是线性的.

21. 设 X 和 Y 是赋范线性空间,$T: X\to Y$ 是有界线性算子,且 T 是满射. 若存在正数 b,使得对一切 $x\in X$ 皆有

$$\|Tx\|\geqslant b\|x\|,$$

则 $T^{-1}: Y\to X$ 存在,它也是有界线性算子并且 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{b}$.

22. 证明:有限维赋范线性空间中的有界闭集是紧集;有界集是列紧集.

23. 设 $\|\cdot\|$ 是$C^{n\times n}$上的方阵范数,D 是 n 阶可逆矩阵. 对于任意 $A\in C^{n\times n}$定义

$$\|A\|_*=\|D^{-1}AD\|,$$

证明 $\|\cdot\|_*$是$C^{n\times n}$上的方阵范数.

24. 设 $\|\cdot\|$ 是$C^{n\times n}$上的方阵范数,B 和 C 都是 n 阶可逆矩阵且 $\|B^{-1}\|\leqslant 1$, $\|C^{-1}\|\leqslant 1$. 对于任意 $A\in C^{n\times n}$,定义

$$\|A\|_*=\|BAC\|,$$

证明 $\|\cdot\|_*$是$C^{n\times n}$上的方阵范数.

25. 对于$C^{n\times n}$上的任何算子范数 $\|\cdot\|$,证明:

(1) 若 $E\in C^{n\times n}$且 $\|E\|=1$,则 E 是 n 阶单位矩阵;

(2) 若 $A\in C^{n\times n}$是可逆矩阵,则 $\|A^{-1}\|\geqslant\|A\|^{-1}$.

26. 对于任意 $A\in C^{n\times n}$,证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F\leqslant\|A\|_2\leqslant\|A\|_F.$$

27. 设 $A\in C^{n\times n}$,λ 是 A 的特征值. 若 A 是可逆矩阵,证明

$$\frac{1}{\| A^{-1} \|_2} \leqslant |\lambda| \leqslant \| A \|_2.$$

28. 设 $A \in C^{n\times n}$,证明：

(1) 若 A 是正规矩阵,则 $\rho(A) = \| A \|_2$;

(2) 若 $A = A^H$,则 $\rho(A) = \| A \|_2$;

(3) 若 A 是酉矩阵,则 $\rho(A) = 1$.

29. 设 $A \in C^{n\times n}$,$U \in C^{n\times n}$是酉矩阵,证明

$$\rho(AU) \leqslant \| A \|_2.$$

第四章　矩阵分析

本章主要介绍函数矩阵的微积分和方阵函数的计算.

§ 4.1　向量和矩阵的微分与积分

一、向量值函数的导数

定义 4.1　设有映射 $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集), $x \in \Omega$. 若存在线性算子 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 使得对 $h \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Ah \|}{\| h \|} = 0, \tag{4.1}$$

则称 f 在点 x 处 **Fréchet 可微**(简称可微), 并称线性算子 A 是 f 在 x 点的 **Fréchet 导算子**(简称导算子), 记为 $f'(x)$, 即 $f'(x) = A$.

若 f 在 Ω 上的每一点都可微, 则称 f 在 Ω 上可微. 于是, 对每个 $x \in \Omega$, $f'(x)$ 都是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性算子, 故此时有

$$f': \Omega \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \text{即 } f': x \mapsto f'(x),$$

其中 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 表示从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性算子空间. 若 f' 在 Ω 上连续, 则称 f 在 Ω 上是连续可微的.

注　(1) 当 $\| h \|$ 足够小时, 由于 Ω 是开集, 故 $x + h \in \Omega$, 于是 $f(x+h)$ 有意义. 在 (4.1) 式中分子的范数应是 $\mathbb{R}^m$ 中的范数, 而分母的范数是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数.

(2) (4.1) 式等价于

$$f(x+h) - f(x) = Ah + r(h), \tag{4.2}$$

其中 $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{\| r(h) \|}{\| h \|} = 0$. 称 Ah 为 f 在 x 点的**微分**. 由 (4.2) 式可知, 若 f 在 x 点可微, 则 f 在 x 点必定连续.

(3)若 f 在 $x\in\Omega$ 处可微，则 f 在 x 点的导算子 $A=f'(x)$ 是唯一的. 事实上，设 A_1,A_2 都是 f 在 x 点的导算子，记 $B=A_1-A_2$. 由不等式

$$\begin{aligned}\|Bh\|\leqslant&\|f(x+h)-f(x)-A_1h\|\\&+\|f(x+h)-f(x)-A_2h\|\end{aligned}$$

可知，当 $\|h\|\to0$ 时，$\frac{\|Bh\|}{\|h\|}\to0$. 故对于任意固定的 $h\neq0$ 及 $t\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{t\to0}\frac{\|B(th)\|}{\|th\|}=0.$$

又因为 B 是线性算子，所以

$$\frac{\|B(th)\|}{\|th\|}=\frac{\|tBh\|}{\|th\|}=\frac{\|Bh\|}{\|h\|},$$

即 $\frac{\|B(th)\|}{\|th\|}$ 与 t 无关. 于是对任意 $h\in\mathbb{R}^n$ 且 $h\neq0$，有 $\frac{\|Bh\|}{\|h\|}=0$，因此 $Bh=0$，从而 $B=0$，即 $A_1=A_2$.

由于导算子 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射，故存在一个 $m\times n$ 阶矩阵与之对应.

设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，$x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$h\in\mathbb{R}^n$ 在这个基下分别表示为

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\quad 和\quad h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^T,$$

而 $f(x)\in\mathbb{R}^m$ 和 $r(h)\in\mathbb{R}^m$ 在 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 下分别表示为

$$\begin{aligned}f(x)&=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))^T\\&=(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))^T\end{aligned}$$

和

$$r(h)=(r_1(h),r_2(h),\cdots,r_m(h))^T.$$

因此 $f(x)$ 是(n 维)向量的向量值函数，亦即 $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 确定了一组(m 个)n 元函数.

设 $A=f'(x)$ 关于基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 和基 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 的矩阵为 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$. 于是(4.2)式可写为

$$\begin{bmatrix} f_1(x+h) \\ f_2(x+h) \\ \vdots \\ f_m(x+h) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1(h) \\ r_2(h) \\ \vdots \\ r_m(h) \end{bmatrix},$$

故对于所有 $i=1,2,\cdots,m$ 有

$$\begin{aligned} & f_i(x_1+h_1,x_2+h_2,\cdots,x_n+h_n)-f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ = & a_{i1}h_1+a_{i2}h_2+\cdots+a_{in}h_n+r_i(h_1,h_2,\cdots,h_n), \end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{|r(h_1,h_2,\cdots,h_n)|}{\rho}=0$, $\rho=\|h\|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+\cdots+h_n^2}$.
由此可知, n 元数量值函数 f_i 在点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处可微, 故各个偏导数 $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 都存在且 $a_{ij}=\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 所以

$$A=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

这个矩阵叫做 f 在 x 点的 **Jacobi 矩阵**, 并称它为 **f 在 x 点的导数**, 即

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}\doteq f'(x)=\left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{m\times n}. \tag{4.3}$$

例 4.1 若 $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} 3x_1+x_3e^{x_2} \\ x_1^3+x_2^2\sin x_3 \end{bmatrix}$, 则

$$f'(x)=\begin{bmatrix} 3 & x_3e^{x_2} & e^{x_2} \\ 3x_1^2 & 2x_2\sin x_3 & x_2^2\cos x_3 \end{bmatrix}.$$

当 $m=1$ 即 $f: \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是 n 元数值函数时，

$$f'(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T,$$

其分量是 f 对某个变元的偏导数. 此时 $f'(x)=\mathrm{grad} f$.

若 f' 在 x 点可微，则称 f 在 x 点二次可微，且称 $\frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x}$ 是 f 在 x 点的**二阶导数**. 由定义 4.1 及(4.3)式可得 n 元函数的二阶导数等于下面的 $n\times n$ 矩阵

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

H 称为 **f 在 x 点的 Hesse 矩阵**. 当 f 的二阶偏导数连续时，Hesse 矩阵是对称的.

当 $n=1$ 时，$f: \Omega(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ 是单元向量值函数.

$$f'(x)=(f_1'(x), f_2'(x), \cdots, f_m'(x))^T, \tag{4.4}$$

即 $f'(x)$ 等于由 $f(x)$ 的各个分量的导数组成的列向量.

二、单元函数矩阵的微分

(4.4)式实际上是单元函数的 $m\times 1$ 矩阵的导数，同样地，可定义单元函数的 $m\times n$ 矩阵的导数.

定义 4.2 设 $A(t)=[a_{ij}(t)]_{m\times n}$，其中 $a_{ij}(t)$ 是变量 $t\in \mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$) 的函数. 若对于 $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$，$\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}$ 都存在，则 $A(t)$ 关于变量 t 的导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{ij}(t)\right]_{m\times n}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1n}(t)\\
\frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2n}(t)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{d}{dt}a_{m1}(t) & \frac{d}{dt}a_{m2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{mn}(t)
\end{bmatrix}.
$$

若将数字矩阵 A 视为函数矩阵，则 A 总是可导的且 $\frac{dA}{dt}=0$.

单元函数矩阵的导数有下列性质(假定下面所涉及的运算都是可以进行的)：

(1) 若函数矩阵 $A(t)$，$B(t)$ 都可导，$a,b\in\mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$)是常数，则

$$\frac{d}{dt}(aA(t)+bB(t))=a\frac{dA(t)}{dt}+b\frac{dB(t)}{dt}.$$

(2) 设 $A(t)$，$B(t)$ 都可导. 则

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t))=\frac{dA(t)}{dt}B(t)+A(t)\frac{dB(t)}{dt}.$$

若 C,K 是数字矩阵，则

$$\frac{d}{dt}(C\cdot B(t))=C\frac{dB(t)}{dt},\ \frac{d}{dt}(A(t)K)=\frac{dA(t)}{dt}K.$$

(3) 设 $A(u)=[a_{ij}(u)]_{m\times n}$ 可导，函数 $u=f(t)$ 可导，则

$$\frac{d}{dt}A(f(t))=\frac{dA(u)}{du}\cdot\frac{df(t)}{dx}.$$

(4) 设方阵 $A(t)$ 可逆(即存在与 $A(t)$ 同阶的方阵 $A^{-1}(t)$，使得 $A(t)A^{-1}(t)=A^{-1}(t)A(t)=E$)，若 $A(t)$ 和 $A^{-1}(t)$ 都可导，则

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t).$$

证明 (1)、(3)由定义 4.2 直接可得，下面证明(2)和(4).

(2) 设 $A(t)=[a_{ik}(t)]_{m\times s}$，$B(t)=[b_{kj}(t)]_{s\times n}$，于是

$$A(t)B(t)=\Big[\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(t)b_{kj}(t)\Big]_{m\times n}.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)B(t)) = \left[\sum_{k=1}^{s}(a_{ik}'(t)b_{kj}(t)+a_{ik}(t)b_{kj}'(t))\right]_{m\times n}$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{s}a_{ik}'(t)b_{kj}(t)\right]_{m\times n}+\left[\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(t)b_{kj}'(t)\right]_{m\times n}$$

$$=\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}B(t)+A(t)\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}.$$

注意，由于矩阵的乘法不具交换律，故上式中乘积的次序一般不能交换.

(4) 因为 $A^{-1}(t)A(t)=E$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^{-1}(t)A(t)) = \frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}A(t)+A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = 0,$$

即 $$\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}A(t) = -A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}.$$

两边右乘以 $A^{-1}(t)$ 得

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}(t)}{\mathrm{d}t} = -A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t).$$

例 4.2 设 $A(t)=\begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^2(t)$ 和 $2A(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$.

解 $A^2(t)=\begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ t+t^2 & t^4 \end{bmatrix}$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^2(t)=\begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 1+2t & 4t^3 \end{bmatrix},$$

$$2A(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 2 & 2t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 2 & 4t^3 \end{bmatrix}.$$

本例说明 $\frac{\mathrm{d}A^2(t)}{\mathrm{d}t}\neq 2A(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$.

三、单元函数矩阵的积分

定义 4.3 设 $A(t)=[a_{ij}(t)]_{m\times n}$. 若 $a_{ij}(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 $A(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积且规定 $A(t)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分为

$$\int_a^b A(t)\mathrm{d}t = \left[\int_a^b a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right]_{m\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b a_{12}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t)\mathrm{d}t \\ \int_a^b a_{21}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b a_{22}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b a_{2n}(t)\mathrm{d}t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b a_{m1}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b a_{m2}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b a_{mn}(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix}.$$

而称 $\int A(t)\mathrm{d}t = \left[\int a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right]_{m\times n}$ 为 $A(t)$ 的**不定积分**.

当 $n=1$ 时,就得到单元向量值函数 $f(t)$ 的积分

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t, \int_a^b f_2(t)\mathrm{d}t, \cdots, \int_a^b f_m(t)\mathrm{d}t\right)^T.$$

不难验证,当所涉及的运算有意义时,单元函数矩阵的积分具有以下性质:

(1) $\int A^T(t)\mathrm{d}t = \left(\int A(t)\mathrm{d}t\right)^T$;

(2) $\int (aA(t) + bB(t))\mathrm{d}t = a\int A(t)\mathrm{d}t + b\int B(t)\mathrm{d}t$, a,b 为常数;

(3) $\int A(t)B\mathrm{d}t = \left(\int A(t)\mathrm{d}t\right)B$, $\int CA(t)\mathrm{d}t = C\int A(t)\mathrm{d}t$ (B,C 为数字矩阵);

(4) $\int\left(A(t)\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = A(t)B(t) - \int \dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}B(t)\mathrm{d}t.$

证明 (1)、(2)由定义 4.3 直接可得,(3)留作练习,下面证明性质(4).

设

$$A(t) = [a_{ik}(t)]_{m\times s}, \quad B(t) = [b_{kj}(t)]_{s\times n},$$

则

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = [a_{ik}'(t)]_{m\times s}, \quad \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = [b_{kj}'(t)]_{s\times n},$$

$$A(t)B(t) = \Big[\sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)b_{kj}(t)\Big]_{m\times n},$$

$$A(t)\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = \Big[\sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)b_{kj}'(t)\Big]_{m\times n},$$

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}B(t) = \Big[\sum_{k=1}^{s} a_{ik}'(t)b_{kj}(t)\Big]_{m\times n}.$$

所以

$$\int\Big(A(t)\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\Big)\mathrm{d}t = \Big[\int\Big(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)b_{kj}'(t)\Big)\mathrm{d}t\Big]_{m\times n}$$

$$= \Big[\sum_{k=1}^{s}\int a_{ik}(t)b_{kj}'(t)\mathrm{d}t\Big]_{m\times n}$$

$$= \Big[\sum_{k=1}^{s}\Big(a_{ik}(t)b_{kj}(t) - \int a_{ik}'(t)b_{kj}(t)\mathrm{d}t\Big)\Big]_{m\times n}$$

$$= \Big[\sum_{k=1}^{s} a_{ik}(t)b_{kj}(t)\Big]_{m\times n} - \Big[\int\Big(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}'(t)b_{kj}(t)\Big)\mathrm{d}t\Big]_{m\times n}$$

$$= A(t)B(t) - \int\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}B(t)\mathrm{d}t.$$

证毕.

§4.2 方阵函数

本节通过方阵幂级数给出方阵函数的定义，并介绍常用的方阵函数的性质，为此先介绍方阵序列、方阵幂级数收敛性的判别法和有关性质.

一、方阵序列收敛的充分必要条件及性质

在第三章我们已讨论过一般赋范线性空间中序列和级数的收敛性，现在来具体研究方阵序列与方阵级数的收敛性.

在下面的讨论中，总假设 $A_m=[a_{ij}^{(m)}]\in C^{n\times n}$，$m=1,2,\cdots$，

$A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$.

定理 4.1 方阵序列$\{A_m\}$收敛于A(即$\lim\limits_{m\to\infty}A_m=A$)，当且仅当对于所有$i,j=1,2,\cdots,n$,都有$\lim\limits_{m\to\infty}a_{ij}^{(m)}=a_{ij}$.

证明 设$\lim\limits_{m\to\infty}A_m=A$即$\lim\limits_{m\to\infty}\|A_m-A\|=0$. 因为$C^{n\times n}$上任何范数都等价,故有$\lim\limits_{m\to\infty}\|A_m-A\|_1=\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}^{(m)}-a_{ij}|=0$. 所以对所有的$i,j=1,2,\cdots,n$, $\lim\limits_{m\to\infty}|a_{ij}^{(m)}-a_{ij}|=0$,即$\lim\limits_{m\to\infty}a_{ij}^{(m)}=a_{ij}$.

以上推证过程是可逆的,故定理得证.

定理 4.1 表明,一个n阶方阵序列收敛,意味着n^2个数列$\{a_{ij}^{(m)}\}$都收敛. 于是,只要有一个数列$\{a_{ij}^{(m)}\}$不收敛,则$\{A_m\}$就发散. 例如,若$A=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},2\right)$,则$\{A_m\}=\{A^m\}$发散,因为数列$\{2^m\}$是发散的.

收敛的方阵序列除了具有一般收敛点列的性质外,还具有下述性质:

(1) 若$\lim\limits_{m\to\infty}A_m=A$, $\lim\limits_{m\to\infty}B_m=B$,则$\lim\limits_{m\to\infty}(A_mB_m)=AB$,其中$B$, $B_m\in C^{n\times n}$, $m=1,2,\cdots$.

(2) 设$\lim\limits_{m\to\infty}A_m=A$,若$A^{-1}$, $A_m^{-1}(m=1,2,\cdots)$都存在,则$\lim\limits_{m\to\infty}A_m^{-1}=A^{-1}$.

证明 (1) 因为

$$\begin{aligned}\|A_mB_m-AB\|&=\|A_mB_m-A_mB+A_mB-AB\|\\&\leqslant\|A_m\|\|B_m-B\|+\|A_m-A\|\|B\|\to 0\quad(m\to\infty\text{时}),\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{m\to\infty}(A_mB_m)=AB$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\det(A_m)&=\lim_{m\to\infty}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}^{(m)}a_{2j_2}^{(m)}\cdots a_{nj_n}^{(m)}\\&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\end{aligned}$$

$$=\det A,$$

且由定理 4.1 可得

$$\lim_{m\to\infty}\operatorname{adj}(A_m)=\operatorname{adj}A.$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}A_m^{-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{adj}(A_m)}{\det(A_m)}=\frac{\lim\limits_{m\to\infty}\operatorname{adj}(A_m)}{\lim\limits_{m\to\infty}\det(A_m)}=\frac{\operatorname{adj}A}{\det A}=A^{-1}.$$

证毕.

同数列$\{z^m\}$的收敛性由 z 的模完全确定一样，方阵序列$\{A^m\}$：$E,A,A^2,\cdots,A^m,\cdots$的收敛性也由 A 的范数完全确定.

定理 4.2 设 $A\in C^{n\times n}$，则$\{A^m\}_{m=0}^{\infty}$收敛于零矩阵的充分必要条件是 $\rho(A)<1$.

证明 先证必要性. 若$\lim\limits_{m\to\infty}A^m=0$，则对于任一种方阵范数$\|\cdot\|$，有$\lim\limits_{m\to\infty}\|A^m\|=0$. 因此

$$(\rho(A))^m=\rho(A^m)\leqslant\|A^m\|\to 0\quad(m\to\infty),$$

故 $\quad\rho(A)<1.$

再证充分性. 若 $\rho(A)<1$，则存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$\rho(A)<\rho(A)+\varepsilon<1.$$

由定理 3.33 知，对此 ε，必存在一种方阵范数$\|\cdot\|_*$使得

$$\|A\|_*<\rho(A)+\varepsilon<1,$$

于是

$$\|A^m\|_*\leqslant\|A\|_*^m<(\rho(A)+\varepsilon)^m\to 0\quad(m\to\infty),$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}A^m=0.$$

证毕.

定理 4.3 设 $A\in C^{n\times n}$，则$\{A^m\}$收敛于零矩阵的充分必要条件是，至少存在一种方阵范数$\|\cdot\|$，使得$\|A\|<1$.

证明 设$\lim\limits_{m\to\infty}A^m=0$. 由定理 4.2 知 $\rho(A)<1$，于是必存在

$\varepsilon>0$，使得 $\rho(A)+\varepsilon<1$. 又由定理 3.33，对此 ε 必存在 $\|\cdot\|$，使得 $\|A\|\leqslant\rho(A)+\varepsilon<1$. 这就证明了条件是必要的.

因为 $\rho(A)\leqslant\|A\|<1$，故由定理 4.2 知条件是充分的.

证毕.

将定理 4.1 用于方阵级数，便得到下面关于方阵级数收敛的充分必要条件.

定理 4.4 设 $A_m=[a_{ij}^{(m)}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$m=0,1,2,\cdots$，$S=[s_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 则方阵级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 收敛于方阵 S 的充分必要条件是，对所有 $i,j=1,2,\cdots,n$，数项级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{ij}^{(m)}$ 收敛于 s_{ij}.

证明 记 $S_N=\sum\limits_{m=0}^{N}A_m=\left[\sum\limits_{m=0}^{N}a_{ij}^{(m)}\right]_{n\times n}$. 根据级数收敛的定义，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m=S$ 当且仅当 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N=S$. 由定理 4.1，这意味着对所有 $i,j=1,2,\cdots,n$，有 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{N}a_{ij}^{(m)}=s_{ij}$，即 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{ij}^{(m)}=s_{ij}$. 证毕.

定理 4.5 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 绝对收敛当且仅当对所有 $i,j=1,2,\cdots,n$，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{ij}^{(m)}$ 绝对收敛.

证明 若 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 绝对收敛，也就是 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\|A_m\|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\|A_m\|_1$ 收敛，即 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}^{(m)}|\right)$ 收敛，则由比较判别法知，对 $i,j=1,2,\cdots,n$，正项级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}|a_{ij}^{(m)}|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{ij}^{(m)}$ 绝对收敛.

另一方面，若对 $i,j=1,2,\cdots,n$，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{ij}^{(m)}$ 都绝对收敛，即

$\sum\limits_{m=0}^{\infty}|a_{ij}^{(m)}|$都收敛，则由收敛级数的加法知，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}^{(m)}|\right)$ 收敛. 又因为

$$\|A_m\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}^{(m)}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}^{(m)}|,$$

所以 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\|A_m\|_1$ 收敛. 因此对任意方阵范数 $\|\cdot\|$，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}\|A_m\|$ 收敛，即 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 绝对收敛. 证毕.

绝对收敛的方阵级数还有下列性质.

若 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 绝对收敛，则

(1) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 收敛，反之不真；

(2) 对任意的 $P,Q\in C^{n\times n}$，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}PA_mQ$ 也绝对收敛.

请读者自己证明.

二、方阵幂级数

定义 4.4 设 X 是任意的 n 阶方阵，$\{c_m\}$ 是一个复数列，称 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mX^m$ 为**方阵 X 的幂级数**，c_m 称为第 m 项的系数. 当 $m=0$ 时，约定 $X^m=E$.

当 $X=A\in C^{n\times n}$时，若 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mA^m$ 收敛（或绝对收敛），其和记为 $f(A)$，即 $f(A)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mA^m$，则称 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mX^m$ 在 $A\in C^{n\times n}$处收敛（或绝对收敛）.

若 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mX^m$ 在 $\Omega\subset C^{n\times n}$内的每一点 X 处都收敛（或绝对收敛），则称它在 Ω 内收敛（或绝对收敛），其和 $f(X)$就是 X 在映射

$f: \Omega(\subset \mathbb{C}^{n\times n}) \to \mathbb{C}^{n\times n}$下的象. 也称 $f(X)$是方阵幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 的和函数.

同复幂级数类似,$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 的收敛域是空间$\mathbb{C}^{n\times n}$中的一个球形域.

定理 4.6 设复幂级数$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ 的收敛半径为 R,$X \in \mathbb{C}^{n\times n}$的谱半径为 $\rho(X)$,则

(1) 当 $\rho(X) < R$ 时,$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 绝对收敛;

(2) 当 $\rho(X) > R$ 时,$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 发散.

证明 (1) 若 $\rho(X) < R$,则存在 $\varepsilon > 0$,使得 $\rho(X) + \varepsilon < R$,从而 $\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|(\rho(X) + \varepsilon)^m$ 收敛. 对上述的 ε,必存在一种方阵范数 $\|\cdot\|$,使得 $\|X\| \leqslant \rho(X) + \varepsilon$. 因为

$$\|c_m X^m\| = |c_m| \, \|X^m\| \leqslant |c_m| \, \|X\|^m \leqslant |c_m|(\rho(X)+\varepsilon)^m,$$

所以$\sum_{m=0}^{\infty} \|c_m X^m\|$收敛,即$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 绝对收敛.

(2) 设 A 是满足 $\rho(A) > R$ 的任一个 n 阶方阵,令 $\rho(A) = |\lambda_j|$,则$|\lambda_j| > R$.

假设$\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$ 收敛,其和为 $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

若 $x \in \mathbb{C}^n$ 是 A 的对应于 λ_j 的单位特征向量,即 $Ax = \lambda_j x$,$(x, x) = x^H x = 1$. 因为对于 $m = 0, 1, 2, \cdots$,有 $A^m x = \lambda_j^m x$,所以

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda_j^m &= \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \lambda_j^m x^H x) = \sum_{m=0}^{\infty} (x^H c_m \lambda_j^m x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (x^H c_m A^m x) = x^H \Big(\sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m \Big) x\end{aligned}$$

$$= x^H S x = \overline{(x, Sx)} \in \mathbb{C},$$

即 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda_j^m$ 收敛，从而 $|\lambda_j| \leqslant R$，这与 $|\lambda_j| > R$ 矛盾，故当 $\rho(A) > R$ 时，$\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 发散. 证毕.

推论 1 若 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ 在全平面收敛，则 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m$ 在全空间 $C^{n \times n}$ 中绝对收敛.

推论 2 设 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-\lambda_0)^m$ 的收敛半径为 R. 若 $X \in C^{n \times n}$ 的所有特征值都满足不等式

$$|\lambda_j - \lambda_0| < R, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

则方阵幂级数 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m (X - \lambda_0 E)^m$ 绝对收敛. 若存在 X 的一个特征值 λ_k，使得

$$|\lambda_k - \lambda_0| > R,$$

则 $\sum_{m=0}^{\infty} c_m (X - \lambda_0 E)^m$ 发散.

推论 1 是显然的，推论 2 的证明作为练习留给读者.

例 4.3 如果 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且 $\rho(A) < 1$，则 $\sum_{m=0}^{\infty} A^m$ 收敛且和为 $(E-A)^{-1}$；当 $\| A \| < 1$ 时，$\| (E-A)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \| A \|}$.

证 因为 $\sum_{m=0}^{\infty} z^m$ 的收敛半径 $R=1$，故 $\sum_{m=0}^{\infty} A^m$ 收敛. 设其和为 S，即

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{m=0}^{N} A^m = \lim_{N \to \infty} (E + A + A^2 + \cdots + A^N) = S,$$

用 $E-A$ 左乘上式两端得

$$\lim_{N \to \infty} [(E-A)(E + A + \cdots + A^N)] = \lim_{N \to \infty} (E - A^{N+1})$$

$$=E=(E-A)S.$$

所以 $S=(E-A)^{-1}$.

当 $\|A\|<1$ 时,

$$\|(E-A)^{-1}\| = \|\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}A^m\| = \lim_{N\to\infty}\|\sum_{m=0}^{N}A^m\|$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\|A\|^m = \sum_{m=0}^{\infty}\|A\|^m = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

例 4.4 设有 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,如果存在一种方阵范数 $\|\cdot\|$,使得 $\|E-A\|<1$,则 A 可逆且 $A^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(E-A)^m$.

证 令 $B=E-A$,则 $\rho(B)<1$. 由例 4.3 知

$$\sum_{m=0}^{\infty}B^m=(E-B)^{-1},$$

即 $A^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(E-A)^m$.

三、方阵函数

这里所讨论的方阵函数,是指由方阵幂级数所确定的函数——方阵幂级数的和函数:

$$f(X)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mX^m,\quad \rho(X)<R.$$

根据定理 4.6,借助于我们熟悉的 Maclaurin 级数,可以得到下列的常用方阵函数.

由于

$$e^z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^m}{m!}+\cdots,$$

$$|z|<+\infty;$$

$$\sin z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots,$$

$$|z|<+\infty;$$

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} + \cdots,$$

$$|z| < +\infty;$$

故对于方阵 $X \in C^{n\times n}$，可定义方阵的

指数函数

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = E + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^m}{m!} + \cdots,$$

$$\rho(X) < +\infty;$$

正弦函数

$$\sin X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m X^{2m+1}}{(2m+1)!} = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \cdots,$$

$$\rho(X) < +\infty;$$

余弦函数

$$\cos X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m X^{2m}}{(2m)!} = E - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots,$$

$$\rho(X) < +\infty.$$

由于

$$\ln(1+z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{m+1}}{m+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots,$$

及当 $\alpha \in \mathbb{R}$ 时

$$(1+z)^\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} z^m$$

$$= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \cdots$$

都在 $|z|<1$ 时成立，故可定义相应的方阵函数

$$\ln(E+X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+1} X^{m+1}, \qquad \rho(X) < 1;$$

$$(E+X)^{\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!} X^m$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}), \rho(X) < 1.$$

由定义立即可得

$$e^0 = E,\ \sin 0 = 0,\ \cos 0 = E,\ \ln E = 0,\ E^{\alpha} = E,$$

其中 0 是 n 阶零矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，$\alpha \in \mathbb{R}$. 当 X 为非零方阵时，$f(X)$ 的值的计算相当复杂，这个问题留待 §4.3 中解决.

四、方阵函数的性质

性质 1（Euler 公式） 对任意的 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$，有

$$e^{iX} = \cos X + i\sin X,$$

$$\cos X = \frac{1}{2}(e^{iX} + e^{-iX}),$$

$$\sin X = \frac{1}{2i}(e^{iX} - e^{-iX}),$$

其中 $i = \sqrt{-1}$.

证明 由定义立即可得.

性质 2 对任意的 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 及 $t \in \mathbb{C}$，有

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A,$$

$$\frac{d}{dt} \sin(At) = A\cos(At) = \cos(At)A,$$

$$\frac{d}{dt} \cos(At) = -A\sin(At) = -\sin(At)A.$$

证明 因为

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

若记 $A^k = [c_{ij}^{(k)}]$，则 $\frac{t^k A^k}{k!} = [t^k c_{ij}^{(k)}/k!]_{n\times n}, k = 0, 1, 2, \cdots$，

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}c_{ij}^{(k)}\right]_{n\times n}=\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}c_{ij}^{(k)}\right]_{n\times n}$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}c_{ij}^{(k+1)}\right]_{n\times n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^{k+1}}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kAA^k}{k!}=A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}=A\mathrm{e}^{At}.$$

如果将 A^{k+1} 写为 A^kA，则可得 $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{At}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{At}A$.

由已证的等式，利用 Euler 公式可得其余两个等式.

性质 3 设 A,B 是任意的两个 n 阶方阵，$t\in\mathbb{C}$. 若 $AB=BA$，则 $\mathrm{e}^{At}B=B\mathrm{e}^{At}$.

证明 $\mathrm{e}^{At}B=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right)B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^kB}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kBA^k}{k!}$

$$=B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k=B\mathrm{e}^{At}.$$

性质 4 设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $AB=BA$，则

$$\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^B\mathrm{e}^A.$$

证明 令 $F(t)=\mathrm{e}^{(A+B)t}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{e}^{-Bt}$，则

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=(A+B)\mathrm{e}^{(A+B)t}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{e}^{-Bt}+\mathrm{e}^{(A+B)t}(-A)\mathrm{e}^{-At}\mathrm{e}^{-Bt}$$

$$+\mathrm{e}^{(A+B)t}\mathrm{e}^{-At}(-B)\mathrm{e}^{-Bt}$$

$$=(A+B)\mathrm{e}^{(A+B)t}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{e}^{-Bt}-A\mathrm{e}^{(A+B)t}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{e}^{-Bt}$$

$$-B\mathrm{e}^{(A+B)t}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{e}^{-Bt}$$

$$=(A+B-A-B)\mathrm{e}^{(A+B)t}\mathrm{e}^{-At}\mathrm{e}^{-Bt}=0,$$ （对任意 $t\in\mathbb{C}$）.

若记 $F(t)=[f_{ij}(t)]_{n\times n}$，则有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{ij}(t)=0$，对任意 $t\in\mathbb{C}$ 及一切 $i,j=1,2,\cdots,n$ 成立. 故 $F(t)$ 是与 t 无关的数字矩阵，所以对任意 $t\in\mathbb{C}$，有

$$F(t)=F(0)=\mathrm{e}^0\mathrm{e}^0\mathrm{e}^0=E.$$

令 $t=1$ 得

$$e^{(A+B)}e^{-A}e^{-B} = E.$$

取 $B=-A$ 得

$$e^{0}(e^{-A}e^{A}) = E,$$

即 $e^{-A}e^{A}=E$,从而知 e^{A} 可逆且 $(e^{A})^{-1}=e^{-A}$. 于是有

$$E = e^{A+B}e^{-A}e^{-B} = e^{A+B}(e^{A})^{-1}(e^{B})^{-1} = e^{A+B}(e^{B}e^{A})^{-1},$$

故 $e^{A+B}=e^{B}e^{A}$. 而 $e^{A+B}=e^{B+A}=e^{A}e^{B}$,所以

$$e^{A+B} = e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A}.$$

证毕.

由以上证明顺便得到下面的性质 5.

性质 5 对任意 $A\in C^{n\times n}$,e^{A} 必可逆且 $(e^{A})^{-1}=e^{-A}$.

应用 Euler 公式及性质 4 可得:

性质 6 对任意的 $A,B\in C^{n\times n}$,当 $AB=BA$ 时有

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B+\cos A\sin B,$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B,$$
$$\sin(2A)=2\sin A\sin B,$$
$$\cos(2A)=\cos^2 A-\sin^2 A,$$
$$\sin^2 A+\cos^2 A=E.$$

在下一节中,我们将看到 $\sin(2\pi E)=0$,$\cos(2\pi E)=E$,于是由性质 6 可得:

性质 7 对任意 $X\in C^{n\times n}$,有

$$\sin(X+2\pi E) = \sin X,$$
$$\cos(X+2\pi E)=\cos X,$$
$$e^{X+2\pi iE}=e^{X}.$$

也就是说,$\sin X$ 和 $\cos X$ 是以 $2\pi E$ 为周期,e^{X} 是以 $2\pi iE$ 为周期的周期函数.

性质 8 对任意 $X\in C^{n\times n}$,$f(X^{T})=(f(X))^{T}$. (自证).

应该注意,当 $AB\neq BA$ 时,性质 3、4 和 6 不一定成立,例如当

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

时，$e^{A+B}\neq e^A e^B$.

§4.3 方阵函数值的计算

给定了 $A\in C^{n\times n}$，求 $f(A)$ 的方法很多. 我们仅介绍两种常用的方法，一种是利用 A 的 Jordom 标准形求 $f(A)$，另一种是将 $f(A)$ 表示为次数不高的多项式.

一、当 A 可对角化时 $f(A)$ 的计算

设 $A\in C^{n\times n}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $P\in C^{n\times n}$，使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

于是

$$A=P\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

若 $f(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_m z^m$ 的收敛半径为 R，则当 $\rho(A)<R$ 时，有

$$\begin{aligned}
f(A)&=\sum_{m=0}^{\infty}c_m A^m=\sum_{m=0}^{\infty}c_m[P\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1}]^m\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}c_m P\operatorname{diag}(\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_n^m)P^{-1}\\
&=P\left(\sum_{m=0}^{\infty}\operatorname{diag}(c_m\lambda_1^m,c_m\lambda_2^m,\cdots,c_m\lambda_n^m)\right)P^{-1}\\
&=P\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\operatorname{diag}(c_m\lambda_1^m,c_m\lambda_2^m,\cdots,c_m\lambda_n^m)\right)P^{-1}\\
&=P\left\{\lim_{N\to\infty}\operatorname{diag}\left(\sum_{m=0}^{N}c_m\lambda_1^m,\sum_{m=0}^{N}c_m\lambda_2^m,\cdots,\sum_{m=0}^{N}c_m\lambda_n^m\right)\right\}P^{-1}\\
&=P\operatorname{diag}\left(\sum_{m=0}^{\infty}c_m\lambda_1^m,\sum_{m=0}^{\infty}c_m\lambda_2^m,\cdots,\sum_{m=0}^{\infty}c_m\lambda_n^m\right)P^{-1}
\end{aligned}$$

即 $f(A) = P\mathrm{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n))P^{-1}$. (4.5)

公式(4.5)不仅给出了当 A 可对角化时，$f(A)$的求法，而且还表明

(1) $f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m A^m$ 与 A 能同时对角化；

(2) $f(A)$的特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

例 4.5 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，求 e^A 及 e^A 的特征值.

解 先计算 A 的特征值：

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2),$$

A 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-2$. 由此可知 A 可对角化，且 e^A 的特征值为 1 和 e^{-2}.

再求使 A 对角化的可逆矩阵 P：

对 $\lambda=0$，解 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得特征向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；

对 $\lambda=-2$，解 $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得特征向量$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，于是

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

最后计算 e^A：

$$e^A = e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}} = P\mathrm{diag}(e^0, e^{-2})P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-e^{-2} & e^{-2} \end{bmatrix}.$$

设 $t \in C$ 是变量，则当 $A \in C^{n\times n}$可对角化(设 $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1}$)时，有

$$\begin{aligned} f(tA) &= f[P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)tP^{-1}] \\ &= f[P\mathrm{diag}(\lambda_1 t, \lambda_2 t, \cdots, \lambda_n t)P^{-1}] \\ &= P\mathrm{diag}(f(\lambda_1 t), f(\lambda_2 t), \cdots, f(\lambda_n t))P^{-1}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

例 4.6 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\2 & -2\end{bmatrix}$，求 $\sin(tA)$.

解 由例 4.5 及公式(4.6)得

$$\sin(tA)=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & -\sin 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\\sin 2t & -\sin 2t\end{bmatrix}.$$

例 4.7 证明 $\sin(2\pi E)=0$，$\cos(2\pi E)=E$.

证明 在公式(4.6)中，令 $P=E$，则 $P=P^{-1}=E$，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，$t=2\pi$. 故

$$\sin(2\pi E)=E\mathrm{diag}(\sin 2\pi,\sin 2\pi,\cdots\mathrm{sim}2\pi)E=0,$$

$$\cos(2\pi E)=E\mathrm{diag}(\cos 2\pi,\cos 2\pi,\cdots,\cos 2\pi)E=E.$$

二、当 A 不能对角化时计算 $f(A)$

若 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 不能对角化，则必存在可逆矩阵 $P\in\mathbb{C}^{n\times n}$，使得 $P^{-1}AP=J$，即 $A=PJP^{-1}$，其中 J 是 A 的 Jordan 标准形.

定理 4.7 设 $f(X)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mX^m$，$X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $\rho(X)<R$. 若

$$X=\mathrm{diag}(X_1,X_2,\cdots,X_s),$$

其中 X_i 是 n_i 阶方阵且 $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$，则

$$f(X)=\mathrm{diag}(f(X_1),f(X_2),\cdots,f(X_s)).$$

证明 $f(X)=f(\mathrm{diag}(X_1,X_2,\cdots,X_s))$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}c_m[\mathrm{diag}(X_1,X_2,\cdots,X_s)]^m$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\mathrm{diag}(c_mX_1^m,c_mX_2^m,\cdots,c_mX_s^m)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\mathrm{diag}\Big(\sum_{m=0}^{N}c_mX_1^m,\cdots,\sum_{m=0}^{N}c_mX_s^m\Big)$$

$$=\mathrm{diag}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}c_mX_1^m,\cdots,\sum_{m=0}^{\infty}c_mX_s^m\Big).$$

因为 $\rho(X_i)\leqslant\rho(X)<R$，故 $\sum_{m=0}^{\infty}c_mX_i^m$ 收敛 $(i=1,2,\cdots,s)$，所以

$$f(X) = \mathrm{diag}(f(X_1), f(X_2), \cdots, f(X_s)).$$ 证毕.

设 $J=\mathrm{diag}(J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \cdots, J_s(\lambda_s))$，其中 $J_i(\lambda_i)$ 是 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 对应的 Jordan 块，即

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i},$$

$i=1,2,\cdots,s$，$\sum_{i=1}^{s} n_i = n$，则

$$f(A) = f(PJP^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (PJP^{-1})^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P J^m P^{-1}$$

$$= P\left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m J^m\right) P^{-1} = Pf(J)P^{-1}$$

$$= P\mathrm{diag}(f[J_1(\lambda_1)], f[J_2(\lambda_2)], \cdots, f[J_s(\lambda_s)])P^{-1},$$

故只要算出了各个 $f(J_i(\lambda_i))$，就不难求出 $f(A)$.

定理 4.8 设复幂级数 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ 的收敛半径为 R.

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$$

是 k 阶 Jordan 块，则当 $|\lambda| < R$ 时，

$$f(J(\lambda)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J^m(\lambda)$$

$$
=\begin{bmatrix}
f(\lambda) & & & & \\
f'(\lambda) & f(\lambda) & & & \\
\frac{f''(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & \ddots & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
\frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} & \cdots & \frac{f''(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & f(\lambda)
\end{bmatrix}.
$$

证明 因为 $J(\lambda)=\lambda E+T$，其中 E 是 k 阶单位矩阵，

$$
T=\begin{bmatrix}
0 & & & & \\
1 & 0 & & & \\
 & 1 & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & 0
\end{bmatrix}_{n\times n},\quad
T^2=\begin{bmatrix}
0 & & & & & \\
0 & 0 & & & & \\
1 & 0 & \ddots & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
\cdots,\quad T^{k-2}=\begin{bmatrix}
0 & & & & & \\
0 & 0 & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & & \ddots & \ddots & & \\
1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
T^{k-1}=\begin{bmatrix}
0 & & & & \\
0 & 0 & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \\
0 & & \ddots & \ddots & \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix},\quad T^k=0.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
J^m(\lambda)&=(\lambda E+T)^m\\
&=\lambda^m E+C_m^1\lambda^{m-1}T+C_m^2\lambda^{m-2}T^2+\cdots+C_m^{k-1}\lambda^{m-k+1}T^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$=\lambda^m E+(\lambda^m)' T+\frac{1}{2!}(\lambda^m)'' T^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}(\lambda^m)^{(k-1)} T^{k-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda^m & & & & \\ (\lambda^m)' & \lambda^m & & & \\ \frac{(\lambda^m)''}{2!} & (\lambda^m)' & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{(\lambda^m)^{(k-1)}}{(k-1)!} & \cdots & \frac{(\lambda^m)''}{2!} & (\lambda^m)' & \lambda^m \end{bmatrix},$$

所以

$$f(J(\lambda))=\sum_{m=0}^{\infty} c_m J^m(\lambda)=$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda^m & & & & \\ \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\lambda^m)' & \sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda^m & & & \\ \frac{1}{2!}\sum_{m=0}^{\infty} c_m (\lambda^m)'' & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(k-1)!}\sum_{m=0}^{\infty} c_m (\lambda^m)^{(k-1)} & \cdots & \frac{1}{2!}\sum_{m=0}^{\infty} c_m (\lambda^m)'' & \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\lambda^m)' & \sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda^m \end{bmatrix}.$$

由于当 $|z|<R$ 时 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ 有任意阶导数且可逐项求导，即 $f^{(l)}(z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m (z^m)^{(l)}$，因此当 $|\lambda|<R$ 时有

$$
f(J(\lambda)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & & & & \\ f'(\lambda) & f(\lambda) & & & \\ \frac{f''(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} & \cdots & \frac{f''(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & f(\lambda) \end{bmatrix}.
$$

证毕

类似地，对于 $t \in \mathbb{C}$ 有

$$
f(tA) = P\operatorname{diag}(f(tJ_1), f(tJ_2), \cdots, f(tJ_s))P^{-1},
$$

其中 $J_i = J_i(\lambda_i)$，

$$
f(tJ_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i t) & & & & \\ f'_\lambda(\lambda_i t) & f(\lambda_i t) & & & \\ \frac{f''_\lambda(\lambda_i t)}{2!} & f'_\lambda(\lambda_i t) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f_\lambda^{(n_i-1)}(\lambda_i t)}{(n_i-1)!} & \cdots & \frac{f''_\lambda(\lambda_i t)}{2!} & f'_\lambda(\lambda_i t) & f(\lambda_i t) \end{bmatrix},
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, s.
$$

例 4.8 求 e^{tA}，设

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}.
$$

解 因为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -2 & 5 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

故 $\lambda=2$，$\lambda=1$. 又因为

$$(A-2E)(A-E)=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\neq 0,$$

所以 A 不能对角化，于是

$$A\sim J=\begin{bmatrix}J_1 & \\ & J_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

设 $P=[x,y,z]\in \mathbb{C}^{3\times 3}$，使得 $P^{-1}AP=J$，从而 $AP=PJ$，即

$$[Ax,Ay,Az]=[2x,y+z,z],$$

亦即

$$\begin{cases}(A-2E)x=0\\ (a-E)y=z\\ (A-E)z=0\end{cases},$$

解之得

$$x=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad z=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

故

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

由于

$$e^{J_1(2t)}=[e^{2t}],\quad e^{J_2(t)}=\begin{bmatrix}e^t & 0\\ te^t & e^t\end{bmatrix},$$所以

$$e^{tA}=P\mathrm{diag}(e^{J_1(2t)},e^{J_2(t)})P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&1\\4&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^t&0\\0&te^t&e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&3&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2te^t+e^{2t}&(3t+2)e^t-2e^{2t}&-(t+1)e^t+e^{2t}\\-2(t+1)e^t+2e^{2t}&(3t+5)e^t-4e^{2t}&-(t+2)e^t+2e^{2t}\\-2(t+2)e^t+4e^{2t}&(3t+8)e^t-8e^{2t}&-(t+3)e^t+4e^{2t}\end{bmatrix}.$$

对于任意的 $A\in C^{n\times n}$,都可以利用 A 的 Jordan 标准形来计算 $f(A)$. 但在计算过程中,除 A 本身是 Jordan 标准形外,都必须求出使 $P^{-1}AP=J$ 的 P 和 P^{-1},这是这种方法的困难所在. 当 n 较大时计算量之大是可想而知的. 下面再介绍一种求 $f(A)$的方法,在这种方法中,不用计算 P 和 P^{-1}.

三、将 $f(A)$表示为 A 的多项式

在 §2.4 中,曾经利用 $A\in C^{n\times n}$的零化多项式将 A 的任何次数高于或等于 n 的多项式 $g(A)$,表示为次数不超过 $n-1$ 的多项式$r(A)$. 若所用的零化多项式是 A 的最小多项式$\varphi(\lambda)$,则$r(\lambda)$的次数小于$\deg\varphi(\lambda)$,这就大大简化了计算. 对于 A 的任意函数$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kA^k$,也可将其表示为次数小于 $\deg\varphi(\lambda)$的多项式 $T(A)$,只是 $T(\lambda)$的系数不能象求 $r(\lambda)$那样以 $\varphi(\lambda)$去除 $g(\lambda)$得到.

定义 4.5 设 $A\in C^{n\times n}$的谱 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$, A 的最小多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$, $\sum_{j=1}^{s}m_j=m$, $f(z)$是复变函数. 若对 $j=1,2,\cdots,s$, $f(\lambda_j),f'(\lambda_j),\cdots,f^{(m_j-1)}(\lambda_j)$都存在,则称$f(z)$在 $\sigma(A)$上有定义,并称 $f(\lambda_j),f'(\lambda_j),\cdots,f^{(m_j-1)}(\lambda_j)$ $(j=1,2,\cdots,s)$为 f 在 $\sigma(A)$上的值或 f 在 A 上的谱值.

定理 4.9 设 $A\in C^{n\times n}$ 的最小多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$, $\sum_{j=1}^{s}m_j=m$. $f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^k$ 的收敛半径为 R.

则当 $\rho(A)<R$ 时,存在唯一的 $m-1$ 次多项式 $T(\lambda)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k\lambda^k$,使得$T(\lambda)$与 $f(\lambda)$在 $\sigma(A)$上的值相同,且 $f(A)=T(A)$.

证明 因为$\rho(A)<R$,故 $f(\lambda)$在 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\}$上有定义. 又由插值多项式理论可知,满足 m 个条件

$$T^{(l)}(\lambda_j)=f^{(l)}(\lambda_j),\quad l=0,1,\cdots,m_j-1,\quad j=1,2,\cdots,s$$

的 $m-1$ 次插值多项式 $T(\lambda)$是存在且唯一的.

下面证明 $f(A)=T(A)$, 设 A 的 Jordan 标准形 $J=\mathrm{diag}(J_1(\lambda_1),J_2(\lambda_2),\cdots,J_t(\lambda_t))$,即存在可逆的 $P\in C^{n\times n}$使得

$$A=P\mathrm{diag}(J_1(\lambda_2),J_2(\lambda_2),\cdots,J_t(\lambda_t))P^{-1},\quad (s\leqslant t\leqslant n),$$

其中
$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}$$

是对应于$(\lambda-\lambda_i)^{p_i}(i=1,2,\cdots,t)$的 p_i 阶 Jordan 块,于是

$$f(A)=P\mathrm{diag}(f[J_1(\lambda_1)],\cdots,f[J_t(\lambda_t)])P^{-1},$$
$$T(A)=P\mathrm{diag}(T[J_1(\lambda_1)],\cdots,T[J_t(\lambda_t)])P^{-1},$$

其中

$$f[J_i(\lambda_i)]=\begin{bmatrix}f(\lambda_i) & & & & \\ f'(\lambda_i) & f(\lambda_i) & & & \\ \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & f'(\lambda_i) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!} & \cdots & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & f'(\lambda_i) & f(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

$$T[J_i(\lambda_i)]=\begin{bmatrix} T(\lambda_i) & & & & \\ T'(\lambda_i) & T(\lambda_i) & & & \\ \frac{T''(\lambda_i)}{2!} & T'(\lambda_i) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{T^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!} & \cdots & \frac{T''(\lambda_i)}{2!} & T'(\lambda_i) & T(\lambda_i) \end{bmatrix}.$$

注意到$(\lambda-\lambda_i)^{p_i}$是$\lambda E-A$的初等因子.假如它与$(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$相当,则由于$\varphi(\lambda)=\prod_{j=1}^{s}(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$是$\lambda E-A$的第$n$个不变因子,故$p_i\leqslant m_j$.从而$f^{(l)}(\lambda_i)$存在$(l=0,1,2,\cdots,p_i-1;i=1,2,\cdots,t)$,且

$$T^{(l)}(\lambda_i)=f^{(l)}(\lambda_i),\ l=0,1,2,\cdots,p_i-1;i=1,2,\cdots,t.$$

因此,对$i=1,2,\cdots,t$有

$$f(J_i(\lambda_i))=T(J_i(\lambda_i)),$$

所以$f(A)=T(A)$. 证毕.

类似地,有

$$f(tA)=T(tA)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k(t)A^k,$$

其中$a_k(t)$是t的函数且$f(t\lambda)$与$T(t\lambda)$在$\sigma(A)$上的值相同.

例 4.9 再解例 4.8.

解

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda-4 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

经计算知$(A-2E)(A-E)\neq 0$,故A的最小多项式为

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,\qquad \deg\varphi(\lambda)=3.$$

设 $f(tA)=e^{tA}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2=T(tA)$. 由于 $f(t\lambda)=e^{t\lambda}$与 $T(t\lambda)=a_0(t)+a_1(t)\lambda+a_2(t)\lambda^2$ 在 $\sigma(A)=\{2,1\}$上的值相同，故得方程组

$$\begin{cases} a_0(t)+2a_1(t)+4a_2(t)=e^{2t} \\ a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)=e^t \\ a_1(t)+2a_2(t)=te^t \end{cases},$$

解之得

$$\begin{cases} a_0(t)=-2te^t+e^{2t} \\ a_1(t)=(3t+2)e^t-2e^{2t} \\ a_2(t)=-(t+1)e^t+e^{2t} \end{cases}.$$

又因为

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 8 & -18 & 11 \end{bmatrix},\text{所以}$$

$$\begin{aligned} e^{tA}&=(-2te^t+e^{2t})E+((3t+2)e^t-2e^{2t})A \\ &\quad+(-(t+1)e^t+e^{2t})A^2 \\ &=\begin{bmatrix} -2te^t+e^{2t} & (3t+2)e^t-2e^{2t} & -(t+1)e^t+e^{2t} \\ -2(t+1)e^t+2e^{2t} & (3t+5)e^t-4e^{2t} & -(t+2)e^t+2e^{2t} \\ -2(t+2)e^t+4e^{2t} & (3t+8)e^t-8e^{2t} & -(t+3)e^t+4e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

四、谱映射定理

定理 4.10 设 $A\in C^{n\times n}$的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，且 $f(\lambda)$是在 $\sigma(A)$上有定义的复变函数，则 $f(A)$的特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$，即

$$\sigma(f(A))=f(\sigma(A)).$$

证明 这是定理 4.7 和 4.8 的直接结果.

例 4.10 设 $A\in C^{n\times n}$，试证：

(1) $\det(e^A)=e^{\operatorname{tr}A}$;

(2) 若 $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,|\lambda|<1\}$，且 $B=(A+E)^{-1}(A-E)$，则 $\sigma(B)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}\lambda<0\}$.

证明 (1) 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 e^A 的特征值为 $e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\cdots,e^{\lambda_n}$，所以

$$\det(e^A)=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=e^{\mathrm{tr}A}.$$

(2) 令 $f(\lambda)=(\lambda+1)^{-1}(\lambda-1)$，则 $f(\lambda)$ 在 $\sigma(A)$ 上有定义. 因此 $f(A)=(A+E)^{-1}(A-E)=B$ 且

$$\sigma(B)=\sigma(f(A))=f(\sigma(A))=\{(\lambda+1)^{-1}(\lambda-1)\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}.$$

而 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{|\lambda|^2-1+(\lambda-\bar{\lambda})}{|\lambda+1|^2}\right)=\dfrac{|\lambda|^2-1}{|\lambda+1|^2}<0$，故结论成立.

§4.4 e^{tA}在解线性常微分方程组中的应用

一、一阶线性常微分方程组的向量表示

设有一阶线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(t)x_j(t)+q_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $t\in\mathbb{R}$ 是自变量，$x_i(t)$ 是未知函数，$p_{ij}(t)$ 和 $q_i(t)$ 是区间 I 上的已知连续函数.

若记 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$，$q(t)=(q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t))^T$，

$$P(t)=\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

则可将其表示为

$$x'(t)=P(t)x(t)+q(t).\tag{4.7}$$

当 $q(t)\equiv0$，即

$$x'(t)=P(t)x(t) \tag{4.8}$$

表示的是一阶线性齐次微分方程组.

当 $P(t)=A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,即

$$x'(t)=Ax(t)+q(t) \tag{4.9}$$

表示一阶线性常系数微分方程组.

一阶线性常系数齐次微分方程组应表示为

$$x'(t)=Ax(t). \tag{4.10}$$

我们只讨论一阶线性常微分方程组,故以下简称为线性微分方程组或向量微分方程.

若将初始条件也写成向量形式:$x(t_0)=c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$,则初值问题的向量表示式为

$$\begin{cases}x'(t)=P(t)x(t)+q(t)\\ x(t_0)=c\end{cases}$$

二、一阶线性常微分方程组初值问题的解

定理 4.11 初值问题

$$(\text{I})\ \begin{cases}x'(t)=Ax(t)\\ x(0)=c\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上有唯一解 $x(t)=e^{tA}c$.

证明 因为

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}(e^{tA}c)=Ae^{tA}c=Ax(t),$$

且 $x(0)=e^0c=Ec=c$,所以 $x(t)=e^{tA}c$ 是初值问题(Ⅰ)的解.

又设 $y(t)$也是(Ⅰ)的解,即

$$y'(t)=Ay(t)\text{且 }y(0)=c.$$

令 $g(t)=e^{-tA}y(t)$,则

$$\begin{aligned}g'(t)&=-Ae^{-tA}y(t)+e^{-tA}y'(t)\\&=-e^{-tA}Ay(t)+e^{-tA}y'(t)=0,\end{aligned}$$

于是对任意的 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$g(t)=g(0)=y(0)=c,\text{即 } e^{-tA}y(t)=c.$$

所以

$$y(t)=e^{tA}c=x(t),\ t\in(-\infty,+\infty),$$

即解是唯一的. 证毕.

用同样的方法可证明下面的结果.

推论 初值问题

$$(\text{I})\begin{cases}x'(t)=Ax(t)\\ x(t_0)=c\end{cases}$$

有唯一解 $x(t)=e^{(t-t_0)A}c$.

例 4.11 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2-x_3\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1+x_3\\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=1\end{cases}$$

解

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ x(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

A 的最小多项式为 $\varphi(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$. 设

$$e^{tA}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2=T(tA).$$

因为 $T(t\lambda)$ 与 $e^{t\lambda}$ 在 $\sigma(A)=\{0,1\}$ 上的值相同,故有

$$\begin{cases}a_0(t)=1\\ a_0(t)+a_1(t)+a_2(t)=e^t\\ a_1(t)+2a_2(t)=te^t\end{cases}.$$

解之得 $a_0(t)=1$, $a_1(t)=-2+2e^t-te^t$, $a_2(t)=1-e^t+te^t$.

又因为

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&-1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{tA}c\\&=[E+(-2+2e^t-te^t)A+(1-e^t+te^t)A^2]c\\&=\begin{bmatrix}1&-1+e^t&1-e^t\\-1+e^t&1+e^t&-1+e^t-te^t\\-1+e^t&0&-1+2e^t-te^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2-e^t\\-2+2e^t-te^t\\-2+3e^t-te^t\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即 $x_1=2-e^t$，$x_2=-2+2e^t-te^t$，$x_3=-2+3e^t-te^t$.

定理 4.12 初值问题

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}x'(t)=Ax(t)+q(t)\\x(t_0)=c\end{cases}$$

在区间 $I(t_0\in I)$ 上有唯一解

$$x(t)=e^{(t-t_0)A}c+e^{tA}\int_{t_0}^{t}e^{-\tau A}q(\tau)d\tau.$$

证明 原方程可写为

$$x'(t)-Ax(t)=q(t).$$

两边同时左乘以 e^{-tA} 得

$$e^{-tA}(x'(t)-Ax(t))=e^{-tA}q(t),$$

即

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}x(t))=e^{-tA}q(t).$$

对于任意 $t\in I$，上式两端分别在 $[t_0,t]$ 上积分得

$$e^{-tA}x(t)-e^{-t_0A}x(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-\tau A}q(\tau)d\tau.$$

所以

$$x(t)=e^{(t-t_0)A}c+e^{tA}\int_{t_0}^{t}e^{-\tau A}q(\tau)d\tau.$$

唯一性的证明同定理 4.11. 证毕.

例 4.12 已知

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\2&1&3\end{bmatrix},\ q(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}\\0\\te^{2t}\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

在$(-\infty,+\infty)$上解初值问题

$$\begin{cases}x'(t)=Ax(t)+q(t)\\x(0)=c\end{cases}$$

解 由定理 4.12,其解为

$$x(t)=e^{tA}\int_{0}^{t}e^{-\tau A}q(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{(t-\tau)A}q(\tau)d\tau.$$

A 的最小多项式为$(\lambda-2)^2(\lambda-4)$,故设

$$e^{tA}=a_0(t)E+a_1(t)A+a_2(t)A^2=T(tA).$$

由 $e^{t\lambda}$与 $T(t\lambda)$在 $\sigma(A)=\{2,4\}$上的值相同可定出

$$\begin{cases}a_0(t)=e^{2t}(e^{2t}-4t)\\a_1(t)=e^{2t}(-e^{2t}+1+3t)\\a_2(t)=\dfrac{1}{4}e^{2t}(e^{2t}-1-2t)\end{cases},$$

$$e^{tA}=e^{2t}[(e^{2t}-4t)E+(-e^{2t}+1+3t)A$$
$$+\frac{1}{4}(e^{2t}-1-2t)A^2].$$

$$e^{(t-\tau)A}q(\tau)=e^{2t}(e^{2(t-\tau)}-4(t-\tau))\begin{bmatrix}1\\0\\\tau\end{bmatrix}+e^{2tA}(-e^{2(t-\tau)}+1$$

$$+3(t-\tau))\begin{bmatrix}1\\0\\\tau\end{bmatrix}+\frac{e^{2t}}{4}A^2(e^{2(t-\tau)}-1-2(t-\tau))\begin{bmatrix}1\\0\\\tau\end{bmatrix}$$

$$=e^{2t}\begin{bmatrix}e^{2t}e^{-2\tau}-4t+4\tau\\0\\e^{2t}\tau e^{-2\tau}-4t\tau+4\tau^2\end{bmatrix}+e^{2t}A\begin{bmatrix}-e^{2t}e^{-2\tau}+1+3t-3\tau\\0\\-e^{2t}\tau e^{-2\tau}+\tau+3t\tau-3\tau^2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{e^{2t}}{4}A^2\begin{bmatrix}e^{2t}e^{-2\tau}-1-2t+2\tau\\0\\e^{2t}\tau e^{-2\tau}-\tau-2t\tau+2\tau^2\end{bmatrix}.$$

积分得

$$x(t)=\int_0^t e^{(t-\tau)A}q(\tau)d\tau=e^{2t}\begin{bmatrix}\frac{e^{2t}}{2}-\frac{1}{2}-2t^2\\0\\\frac{e^{2t}}{4}-\frac{1}{4}-\frac{t}{2}-\frac{2t^3}{3}\end{bmatrix}$$

$$+e^{2t}A\begin{bmatrix}\frac{-e^{2t}}{2}+\frac{1}{2}+t+\frac{3t^2}{2}\\0\\\frac{-e^{2t}}{4}+\frac{1}{4}+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}\end{bmatrix}$$

$$+\frac{e^{2t}}{4}A^2\begin{bmatrix}\frac{e^{2t}}{2}-\frac{1}{2}-t-t^2\\0\\\frac{e^{2t}}{4}-\frac{1}{4}-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\end{bmatrix}.$$

将

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\2&1&3\end{bmatrix},\ A^2=\begin{bmatrix}6&-4&6\\-2&8&-6\\10&4&10\end{bmatrix}$$

代入并化简得

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}\frac{3}{8}e^{2t}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}t-\frac{3}{4}t^2\\-\frac{3}{8}e^{2t}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}t^2\\\frac{3}{8}e^{2t}-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}t^2\end{bmatrix}.$$

习 题 四

1. 设 $f(x)=f(x_1,x_2,x_3)=(x_1e^{x_2},x_2\sin x_3)^T$，求 $f'(x)$.

2. 设 $A(t)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\-\sin t & \cos t\end{bmatrix}$，

   求 $\frac{dA(t)}{dt}$，$\frac{d}{dt}[\det A(t)]$，$\det\left(\frac{dA(t)}{dt}\right)$.

3. 设 $A(t)=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\1 & 2t\\\sin t & \cos t\end{bmatrix}$，求 $\int_0^1 A(t)dt$.

4. 设 $x=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T\in\mathbb{R}^n$，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称矩阵，$f=x^TAx$. 试证

   (1) $\frac{df}{dt}=2x^TA\frac{dx}{dt}$；

   (2) $\frac{d}{dt}((x,x))=2x^T\frac{dx}{dt}$.

5. 设 B,C 是数字矩阵且下列所有运算都有意义，试证

$$\int A(t)Bdt=\left(\int A(t)dt\right)B,\quad \int CA(t)dt=C\int A(t)dt.$$

6. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$A_m\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$m=0,1,2,\cdots$. 试证

   (1) 若 $\lim\limits_{m\to\infty}A_m=A$，则 $\lim\limits_{m\to\infty}A_m^T=A^T$；$\lim\limits_{m\to\infty}\overline{A}_m=\overline{A}$；$\lim\limits_{m\to\infty}A_m^H=A^H$；

   (2) 若 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mA^m$ 收敛，则 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_m(A^T)^m=\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mA^m\right)^T$.

7. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & -1 & 3\end{bmatrix}$，若 $B=\frac{1}{3}A$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$.

8. 设 $A\in C^{n\times n}$，则$\lim\limits_{k\to\infty}A^k=0$ 的充要条件是，对任意的 $x\in C^n$，$\lim\limits_{k\to\infty}(A^kx)=0$.

9. 设 $A_m\in C^{n\times n}$，$m=0,1,2,\cdots$. 若$\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 绝对收敛，则

(1) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m$ 收敛，反之不真；

(2) 对任意的 $P,Q\in C^{n\times n}$，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}PA_mQ$ 绝对收敛.

10. 证明定理 4.6 的推论 2.

11. 试证，对 $t\in C$ 有

$$e^{t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{bmatrix}.$$

12. 设 $A=\begin{bmatrix}-2&1&\\&-2&1\\&&-2\end{bmatrix}$，求 e^{tA}.

13. 设 $A=\dfrac{\pi}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\sin A$.

14. 求 e^{tA}，若

(1) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}$； (2) $A=\begin{bmatrix}3&&&\\&-2&1&\\&&-2&1\\&&&-2\end{bmatrix}$.

15. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，

求 e^{tA}； $\sin(tA)$.

16. 证明

(1) 若 A 是反 Hermite 矩阵，则 e^A 是酉矩阵；

(2) 若 A 是 Hermite 矩阵，则 e^{iA}是酉矩阵.

17. 设 $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\2&1&3\end{bmatrix}$，求 $\det(e^A)$.

18. 求解初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -7x_1 - 7x_2 + 5x_3 \\
\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 8x_1 + 8x_2 - 5x_3 \\
\dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -5x_2 \\
x_1(0) = 3,\ x_2(0) = -2,\ x_3(0) = 1
\end{cases}
$$

第五章　代数方程组的解法

工程技术中的许多问题，常常直接或间接地归结为求解代数方程组．本章将介绍求解代数方程组常用的一些数值方法及有关理论．§5.1 和§5.2 介绍解线性代数方程组的 Gauss 消去法和矩阵的三角分解，§5.3 给出 Banach 压缩映射原理，§5.4 介绍解线性方程组的迭代法，§5.5 阐述解非线性方程组迭代法的一般理论，§5.6 介绍解非线性方程组的 Newton 格式及其各种变形格式．

§5.1　解线性方程组的 Gauss 消去法

考虑 n 阶线性方程组

$$Ax=b, \tag{5.1}$$

其中 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in\mathbb{R}^n$．在本节的讨论中，总假设 A 是非奇异矩阵．根据线性代数的有关知识，方程组(5.1)有唯一解．

求解方程组(5.1)的方法很多，可把它们分为直接法和迭代法两大类．直接法是指那些在没有舍入误差影响的假设下，经过有限次运算可求得方程组精确解的方法．线性代数中的 Cramer 法则是一种直接法．根据 Cramer 法则，(5.1)的解为

$$x_k=\frac{D_k}{D},\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

其中 $D=\det A$，而 D_k 是将 A 的第 k 列换为 b 所得矩阵的行列式．

用 Cramer 法则求解方程组(5.1)时，需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，每个 n 阶行列式为 $n!$ 项之和，每项又是 n 个数的乘积．因

此，所需进行的乘法运算次数总和为

$$S=(n+1)!\,(n-1).$$

由此可见，当 n 较大时，Cramer 法则将因为计算量过大而无法使用.

本节将介绍的 Gauss 消去法是另一种直接法.

一、顺序 Gauss 消去法

顺序 Gauss 消去法的实质就是初等数学中的消元法. 首先结合一个具体的方程组说明 Gauss 消去法的求解过程.

例 5.1 求解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 & (5.2)\\ 2x_1+2x_2+3x_3=3 & (5.3)\\ -x_1-3x_2+8x_3=10 & (5.4)\end{cases}$$

解 把方程(5.2)乘以－2 加到方程(5.3)上，把方程(5.2)加到(5.4)上，消去(5.3)和(5.4)中的 x_1，得到等价(即同解)方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 & (5.2)\\ -2x_2+x_3=3 & (5.5)\\ -x_2+9x_3=10 & (5.6)\end{cases}$$

再把方程(5.5)乘以－0.5 加到方程(5.6)上，消去(5.6)中的 x_2 得到等价方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 & (5.2)\\ -2x_2+x_3=3 & (5.5)\\ 8.5x_3=8.5 & (5.7)\end{cases}$$

这个方程组是很容易求解的. 由方程(5.7)得 $x_3=1$；把 $x_3=1$ 代入(5.5)得 $x_2=-1$；把 $x_3=1, x_2=-1$ 代入(5.2)得 $x_1=1$.

这种求解方法的演算过程可分为两部分. 首先把方程组化成等价的上三角方程组，这个演算过程称为**消元过程**. 其次对上三角方程组由最后一个方程开始按照求解——代入的循环演算程序求得方程组的解，这个演算过程称为**回代过程**. 这种求解方法称为顺

序 Gauss 消去法.

顺序 Gauss 消去法的消元运算实质上是对方程组的增广矩阵的初等变换.现在就一般的 n 阶线性方程组(5.1)介绍顺序 Gauss 消去法的消元过程.

记 $A^{(1)}=A, b^{(1)}=b, a_{ij}^{(1)}=a_{ij}, b_i^{(1)}=b_i, i,j=1,2,\cdots,n.$

第 1 步,设 $a_{11}^{(1)}\neq 0$,令

$$l_{i1}=a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}, \quad i=2,3,\cdots,n.$$

用 $-l_{i1}$ 乘以增广矩阵 $[A^{(1)},b^{(1)}]$ 的第 1 行加到第 i 行上,$i=2,3,\cdots,n$,$[A^{(1)},b^{(1)}]$ 被变换为

$$[A^{(2)},b^{(2)}]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix},$$

其中
$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-l_{i1}^{(1)}a_{1j}^{(1)}, \quad i,j=2,3,\cdots,n;$$
$$b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-l_{i1}b_1^{(1)}, \quad i=2,3,\cdots,n.$$

第 2 步,设 $a_{22}^{(2)}\neq 0$,令

$$l_{i2}=a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}, \quad i=3,4,\cdots,n.$$

用 $-l_{i2}$ 乘以 $[A^{(2)},b^{(2)}]$ 的第 2 行加到第 i 行上,$i=3,4,\cdots,n$,则 $[A^{(2)},b^{(2)}]$ 被变换为

$$[A^{(3)},b^{(3)}]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

其中
$$a_{ij}^{(3)}=a_{ij}^{(2)}-l_{i2}^{(2)}a_{2j}^{(2)}, \quad i,j=3,4,\cdots,n;$$
$$b_i^{(3)}=b_i^{(2)}-l_{i2}b_2^{(2)}, \quad i=3,4,\cdots,n.$$

假设进行完第 $k-1$ 步后,增广矩阵被变换为

$$
[A^{(k)},b^{(k)}]=\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1(k-1)}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2(k-1)}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & a_{(k-1)(k-1)}^{(k-1)} & a_{(k-1)k}^{(k-1)} & \cdots & a_{(k-1)n}^{(k-1)} & b_{k-1}^{(k-1)} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{bmatrix}
$$

第 k 步，设 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，令

$$l_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)},\quad i=k+1,k+2,\cdots,n.$$

用 $-l_{ik}$ 乘以 $[A^{(k)},b^{(k)}]$ 的第 k 行加到第 i 行上，$i=k+1,k+2,\cdots,n$，$[A^{(k)},b^{(k)}]$ 被变换为

$$
[A^{(k+1)},b^{(k+1)}]=\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & a_{1(k+1)}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & a_{2(k+1)}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & a_{kk}^{(k)} & a_{k(k+1)}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{(k+1)(k+1)}^{(k+1)} & \cdots & a_{(k+1)n}^{(k+1)} & b_{k+1}^{(k-1)} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n(k+1)}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & b_n^{(k+1)}
\end{bmatrix}
$$

其中

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)},\quad i,j=k+1,k+2,\cdots,n;$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)}, \quad i = k+1, k+2, \cdots, n.$$

第 $n-1$ 步结束后，增广矩阵被变换为

$$[A^{(n)}, b^{(n)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1(n-1)}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2(n-1)}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{(n-1)(n-1)}^{(n-1)} & a_{(n-1)n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

至此，消元过程结束，方程组(5.1)化为以$[A^{(n)}, b^{(n)}]$为增广矩阵的等价的上三角方程组

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{1(n-1)}^{(1)} x_{n-1} + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{2(n-1)}^{(2)} x_{n-1} + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{(n-1)(n-1)}^{(n-1)} x_{n-1} + a_{(n-1)n}^{(n-1)} x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \quad (5.8)$$

为了求得方程组(5.1)的解，对等价方程组(5.8)施行回代过程. 设 $a_{nn}^{(n)} \neq 0$，得

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)} \\ x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \right) / a_{kk}^{(k)}, \quad k = n-1, n-2, \cdots, 1. \end{cases} \quad (5.9)$$

用顺序 Gauss 消去法解方程组(5.1)时，消元过程的第 k 步中，计算每个 l_{ik}，$a_{ij}^{(k+1)}$和 $b_i^{(k+1)}$均只需一次乘法或除法运算，这些数共有$(n-k)(n-k+2)$个. 而消元过程共进行 $n-1$ 步，所以消元过程乘法和除法运算次数总和为

$$N_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+2).$$

由(5.9)式可知,回代过程乘法和除法运算次数总和为

$$N_2=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

因此,Gauss 消去法的乘法和除法运算次数之和为

$$N=N_1+N_2=\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n.$$

由此可见,当 n 较大时,Gauss 消去法比 Cramer 法则的计算量大为减少.

二、列主元素 Gauss 消去法

在顺序 Gauss 消去法中,$a_{kk}^{(k)}$称为第 k 步的主元素.因为在消元过程和回代过程都要用 $a_{kk}^{(k)}$作除数,所以必须要求 $a_{kk}^{(k)}\neq 0,k=1,2,\cdots,n$.这在具体计算时常常得不到保证.此外,即使这个条件得到保证,当某个 $a_{kk}^{(k)}$的绝对值相对很小时,对计算结果也将产生不良影响.

例如,方程组

$$\begin{cases} 0.00001x_1+x_2=2 \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \tag{5.10}$$

的精确解为

$$x_1=\frac{100000}{99999},\quad x_2=\frac{199997}{99999}.$$

若在四位十进制的限制下,用顺序 Gauss 消去法,得等价三角方程组

$$\begin{cases} 0.1000\times 10^{-4}x_1+0.1000\times 10x_2=0.2000\times 10 \\ -0.1000\times 10^6x_2=-0.2000\times 10^6 \end{cases}$$

经回代,得

$$x_2=0.2000\times 10\quad,\quad x_1=0.0000.$$

显然,严重失真.造成这种结果的原因在于主元素的绝对值过小,用它作除数产生了较大的舍入误差,再经传播,误差变得更大.

为了克服当 $a_{kk}^{(k)}=0$ 时顺序 Gauss 消去法失效和当 $|a_{kk}^{(k)}|$ 过小时结果严重失真两个弊端,可通过选取合适的元素作为主元素对顺序 Gauss 消去法加以改进,这就产生了列主元素 Gauss 消去法和全主元素 Gauss 消去法. 由于实际应用中这两种方法的精度差不多,故这里只介绍列主元素 Gauss 消去法.

列主元素 Gauss 消去法与顺序 Gauss 消去法的不同之处在于它不是按照自然顺序选取主元素. 首先在增广矩阵 $[A^{(1)},b^{(1)}]$ 的第 1 列 n 个元素中选取绝对值最大的一个作为主元素,并把它所在的行与第 1 行交换,再通过初等行变换把第 1 列的后 $n-1$ 个元素消为 0,得增广矩阵 $[A^{(2)},b^{(2)}]$. 其次,在矩阵 $[A^{(2)},b^{(2)}]$ 的第 2 列后 $n-1$ 个元素中选取绝对值最大的一个作为主元素,把它所在的行与第 2 行交换,再通过初等行变换把第 2 列的后 $n-2$ 个元素消为 0,得到增广矩阵 $[A^{(3)},b^{(3)}]$. 依此继续推演. 只要 $\det A\neq 0$,消元过程必能进行到底,最后得到一个与原方程组等价的上三角方程组.

用列主元素 Gauss 消去法解方程组(5.10). 增广矩阵

$$[A^{(1)},b^{(1)}]=\begin{bmatrix}0.1000\times 10^{-4} & 0.1000\times 10 & 0.2000\times 10\\ 0.1000\times 10 & 0.1000\times 10 & 0.3000\times 10\end{bmatrix}.$$

主元素为 $a_{21}^{(1)}=0.1000\times 10$. 交换第 1,2 两行得

$$\begin{bmatrix}0.1000\times 10 & 0.1000\times 10 & 0.3000\times 10\\ 0.1000\times 10^{-4} & 0.1000\times 10 & 0.2000\times 10\end{bmatrix}.$$

用 -10^{-5} 乘以第一行加到第 2 行上得

$$[A^{(2)},b^{(2)}]=\begin{bmatrix}0.1000\times 10 & 0.1000\times 10 & 0.3000\times 10\\ 0 & 0.1000\times 10 & 0.2000\times 10\end{bmatrix}.$$

经回代,得

$$x_2=0.2000\times 10\quad,\quad x_1=0.1000\times 10.$$

与精确解相比较,已准确到最后一位.

三、线性方程组的性态与条件数

先看一个例子，方程组

$$\begin{cases}12x_1+35x_2=59\\12x_1+35.001x_2=59.001\end{cases}$$

的解为 $x_1=2$， $x_2=1$. 如果由于某种原因，第二个方程的系数发生了微小扰动，方程组变为

$$\begin{cases}12x_1+35x_2=59\\12x_1+34.999x_2=59.002\end{cases},$$

则解将变为 $x_1=10.75$， $x_2=-2$.

比较两个方程组的解可以看出，尽管系数只发生了微小变化，但其解却面貌全非. 一个实际问题化为数学问题，再利用计算机处理，常常会使原始数据出现扰动. 因此，原始数据的扰动对解的影响便成了一个必须加以研究的问题.

在方程组(5.1)中，设 $b\neq 0$. 给 b 一个小扰动 δb，(5.1)的解 x 将得到一个扰动 δx，即有

$$A(x+\delta x)=b+\delta b.$$

因为 x 是(5.1)的解，所以由上式得

$$A\delta x=\delta b.$$

于是

$$\delta x=A^{-1}\delta b,$$

$$\|\delta x\|\leqslant\|A^{-1}\|\|\delta b\|.$$

又由

$$\|b\|\leqslant\|A\|\|x\|$$

得到

$$\|x\|\geqslant\|b\|\|A\|^{-1}. \tag{5.11}$$

因此

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leqslant\|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \tag{5.12}$$

此式表明，由 b 的扰动 δb 引起解 x 的相对误差不超过 b 的相对误差的 $\|A\|\|A^{-1}\|$ 倍.

若方程组(5.1)右端无扰动，而系数矩阵 A 有扰动 δA，则(5.1)的解 x 的扰动 δx 满足

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b.$$

由此得

$$\delta x=-A^{-1}\delta A(x+\delta x).$$

$$\|\delta x\|\leqslant\|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x+\delta x\|.$$

因此

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|}\leqslant\|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}. \tag{5.13}$$

这表明，由 A 的扰动 δA 引起解 x 的相对误差不超过 A 的相对误差的 $\|A\|\|A^{-1}\|$ 倍.

在式(5.12)和(5.13)中起控制作用的数都是 $\|A\|\|A^{-1}\|$，它反映了 A 和方程组(5.1)的某种性态.

定义 5.1 对非奇异矩阵 A，称 $\|A\|\|A^{-1}\|$ 为 A 的**条件数**，记为 $\mathrm{cond}A$.

同一个矩阵在不同的范数下，条件数可能不同. 但是，由于

$$\|A\|\|A^{-1}\|\geqslant\|AA^{-1}\|=\|E\|=1,$$

因此，条件数总是一个放大的倍数.

若方程组(5.1)的系数矩阵 A 和右端向量 b 同时分别有扰动 δA 和 δb，则(5.1)的解 x 的扰动 δx 满足

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b.$$

由此得到

$$\delta x=A^{-1}\delta b-A^{-1}\delta Ax-A^{-1}\delta A\delta x.$$

于是

$$\|\delta x\|\leqslant\|A^{-1}\|\|\delta b\|+\|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x\|$$

$$+\|A^{-1}\|\|\delta A\|\|\delta x\|.$$

两边同时除以 $\|x\|$，得到

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leqslant\|A^{-1}\|\left(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|}+\|\delta A\|\right)$$
$$+\|A^{-1}\|\|\delta A\|\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}.$$

如果 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$，由上式可得

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leqslant\|A^{-1}\|\left(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|}+\|\delta A\|\right)/(1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|).$$

再利用(5.11)式得

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\mathrm{cond}A}{1-\mathrm{cond}A\|\delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right). \quad (5.14)$$

由(5.12)～(5.14)式可知，若条件数不太大，扰动所引起解的相对误差一定不大；若条件数很大，扰动引起解的相对误差可能很大. 故系数矩阵的条件数反映了线性方程组在求解方面的性态.

定义 5.2 若方程组(5.1)系数矩阵 A 的条件数相对较小，则称这个方程组是**良态的**；反之，若 A 的条件数相对较大，则称方程组是**病态的**. 同时称 A 为(对解方程组而言)**良态矩阵**或**病态矩阵**.

对于 Hilbert 矩阵

$$H_n=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1}\end{bmatrix},$$

当 $n=3$ 时，$\|H_3\|_\infty=\frac{11}{6}$，$\|H_3^{-1}\|_\infty=408$，$\mathrm{cond}_\infty H_3=748$. 因此，$H_3$ 为病态矩阵(相对于解方程组而言). 当 $n=6$ 时，$\mathrm{cond}_\infty H_6$

$\approx 2.9\times 10^7$. 随着 n 的增大，H_n 的条件数增长很快. 因此，n 越大，H_n 的病态越严重.

根据以上讨论，要判断一个矩阵是病态的还是良态的，需要计算矩阵的条件数 $\mathrm{cond}A=\|A\|\|A^{-1}\|$，而计算 A^{-1}常常是很复杂的. 在实际计算中，如下一些现象可作为判断病态矩阵的参考.

(1) 若用主元素 Gauss 消去法解方程组(5.1)时出现小主元素，则 A 可能是病态的.

(2) 若矩阵的行列式值相对地很小，或矩阵的某些行或列近似地线性相关，则矩阵有可能是病态的.

对病态方程组，求解时需十分慎重，一般需采用高精度算法.

§5.2 矩阵的三角分解

一、Doolittle 分解

顺序 Gauss 消去法的消元过程，实质上是用矩阵 $P_1,P_2,\cdots P_{n-1}$依次乘以方程组(5.1)两边，即

$$P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1Ax=P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1b,$$

而将(5.1)化为上三角方程组

$$A^{(n)}x=b^{(n)},$$

其中

$$P_k=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{(k+1)k} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1\end{bmatrix},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

↑ 第 k 列

$$A^{(n)} = P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1A,\ b^{(n)} = P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1b.$$

记
$$L=(P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1)^{-1},\quad U=A^{(n)},$$
则
$$A = LU, \tag{5.15}$$
其中 L 是单位下三角矩阵(即主对角线上元素均为 1 的下三角矩阵),U 是上三角矩阵.

如果能够采用某种方法把 A 分解为(5.15)式的形式,代入方程组(5.1)得
$$LUx = b.$$
由此得到
$$Ux = L^{-1}b.$$
令
$$L^{-1}b = y,$$
则
$$Ly = b, \tag{5.16}$$
$$Ux = y. \tag{5.17}$$
因为 L 是单位下三角矩阵,所以由方程组(5.16)很容易求出 y. 将求得的 y 代入方程组(5.17). 由于 U 是上三角矩阵,由(5.17)又很容易求得 x. 因此,将矩阵 A 分解成(5.15)的形式会给解方程组(5.1)带来极大的方便.

给定 n 阶矩阵 A,如果存在一个下三角矩阵 L 与一个上三角矩阵 U,使得 $A=LU$,则称 $A=LU$ 为 A 的**三角分解**. 特别地,当 L 是单位下三角矩阵时,称 $A=LU$ 为 A 的 **Doolittle 分解**.

定理 5.1 设 $A[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵,则 A 存在唯一的 Doolittle 分解的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式均不为零.

证明 充分性. 用 A_{kk} 表示 A 的 k 阶顺序主子阵,$k=1,2,\cdots,n$. 由 $A_{11}=a_{11}\neq 0$,A_{11} 可分解为单位下三角矩阵 $L_1=1$ 与非奇异上三角矩阵 $U_1=a_{11}$ 的乘积. 设 $A_{kk}(k\leqslant n-1)$ 可分解为 $A_{kk}=L_kU_k$,其

中 L_k 是 k 阶单位下三角矩阵,U_k 是 k 阶非奇异上三角矩阵. 现考察 A 的 $k+1$ 阶顺序主子阵

$$A_{(k+1)(k+1)} = \begin{bmatrix} A_{kk} & w \\ z^T & a \end{bmatrix},$$

此处向量 w,z 和元素 a 都是已知的. 令

$$A_{(k+1)(k+1)} = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ p^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & q \\ 0 & u \end{bmatrix},$$

则

$$L_k q = w,\ p^T U_k = z^T,\ p^T q + u = a.$$

由此解得

$$q = L_k^{-1} w\ ,\ p^T = z^T U_k^{-1},\ u = a - z^T A_k^{-1} w.$$

记

$$L_{k+1} = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ p^T & 1 \end{bmatrix},\ U_{k+1} = \begin{bmatrix} U_k & q \\ 0 & u \end{bmatrix},$$

则

$$A_{(k+1)(k+1)} = L_{k+1} U_{k+1},$$

并且 L_{k+1} 是单位下三角矩阵,U_{k+1} 是非奇异上三角矩阵. 根据归纳法原理,存在单位下三角矩阵 L 和非奇异上三角矩阵 U,使得

$$A = A_{nn} = LU\ .$$

设 A 有两种 Doolittle 分解

$$A = LU = L^* U^*, \tag{5.18}$$

其中 L 与 L^* 是单位下三角矩阵,U 与 U^* 是上三角矩阵. 由于 A 非奇异,所以 U 与 U^* 也是非奇异矩阵. 由(5.18)式得

$$L^{*-1} L = U^* U^{-1}.$$

上式左端是单位下三角矩阵,右端是上三角矩阵,从而两端一定都是单位矩阵. 因此,

$$L^* = L,\ U^* = U.$$

唯一性得证.

必要性. 设 A 存在唯一的 Doolittle 分解 $A=LU$. 将它写成分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A_{kk} & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{kk} & 0 \\ M_k & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{kk} & V_k \\ 0 & W_k \end{bmatrix},$$

其中 A_{kk}, L_{kk} 与 U_{kk} 分别表示 A, L 与 U 的 k 阶顺序主子阵. 按分块矩阵的运算法则,得到

$$A_{kk} = L_{kk}U_{kk}.$$

因为 A 非奇异,所以 L 与 U 也都是非奇异的. 于是,由

$$\det L = (\det L_{kk})(\det N_k) \neq 0$$

和

$$\det U = (\det U_{kk})(\det W_k) \neq 0$$

可知, L_{kk} 与 U_{kk} 都是非奇异矩阵. 从而 A_{kk} 也是非奇异的, A 的 k 阶顺序主子式不等于零. 由 k 的任意性,必要性得证.

定义 5.3 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$,如果 A 的元素满足

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1,2,\cdots,n,$$

则称 A 为**行对角占优矩阵**. 如果 A 的元素满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1,2,\cdots,n,$$

则称 A 为**严格行对角占优矩阵**. 如果 A^T 是(严格)行对角占优矩阵,则称 A 为**(严格)列对角占优矩阵**.

引理 5.1 如果 $A[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格行(或列)对角占优矩阵,则 A 是非奇异矩阵.

证明 设 A 是奇异矩阵,则 $\det A=0$. 因此,存在非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 使得

$$Ax = 0.$$

设$|x_i|=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$,则 $x_i\neq0$. 由

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=0$$

得

$$|a_{ii}x_i|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|\leqslant|x_i|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|.$$

于是

$$|a_{ii}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|.$$

这与 A 严格行对角占优矛盾.(如果 A 是严格列对角占优矩阵,则 A^T 是严格行对角占优矩阵. 由已证结果知 A^T 是非奇异矩阵,因此 A 是非奇异矩阵.) 证毕.

由定理 5.1 和引理 5.1 易知如下结论成立.

推论 如果 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$是严格行(或列)对角占优矩阵或 A 是正定矩阵,则 A 有唯一的 Doolittle 分解.

设 $A[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$的各阶顺序主子阵都是非奇异矩阵,$A$ 的 Doolittle 分解为 $A=LU$. 用 l_{ij}和 u_{ij}分别表示矩阵 L 和 U 的元素. 由定理 5.1 的证明可知 $u_{ii}\neq0,i=1,2,\cdots,n$. 又由

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\\vdots&\ddots&\ddots&\\l_{n1}&\cdots&l_{n(n-1)}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1n}\\&u_{22}&\cdots&u_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&u_{nn}\end{bmatrix}$$

得到

$$a_{1j}=u_{1j},\qquad j=1,2,\cdots,n,\tag{5.19}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}\sum\limits_{t=1}^{j}l_{it}u_{tj} & 当\ j<i\\ \sum\limits_{t=1}^{i-1}l_{it}u_{tj}+u_{ij} & 当\ j\geqslant i\end{cases}\quad(i=2,3,\cdots,n).\tag{5.20}$$

利用(5.19)式得 U 的第 1 行元素

$$u_{1j}=a_{1j}, \qquad j=1,2,\cdots,n. \tag{5.21}$$

在(5.20)的第1式中令 $j=1$ 得 L 的第1列元素

$$l_{i1}=a_{i1}/u_{11}, \qquad i=2,3,\cdots,n. \tag{5.22}$$

在(5.20)的第2式中令 $i=2$ 得 U 的第2行元素

$$u_{2j}=a_{2j}-l_{21}u_{1j}, \qquad i=2,3,\cdots,n.$$

再令 $j=2$，由(5.20)的第1式得 L 的第2列元素

$$l_{i2}=\frac{1}{u_{22}}(a_{i2}-l_{i1}u_{12}), \qquad i=3,4,\cdots,n.$$

一般地，求出 U 的前 $k-1$ 行和 L 的前 $k-1$ 列元素之后，由下式计算 U 的第 k 行和 L 的第 k 列元素，

$$u_{kj}=a_{kj}-\sum_{t=1}^{k-1}l_{kt}u_{tj}, \quad j=k,k+1,\cdots,n; \tag{5.23}$$

$$l_{ik}=\frac{1}{u_{kk}}\left(a_{ik}-\sum_{t=1}^{k-1}l_{it}u_{tk}\right), \quad j=k+1,k+2,\cdots,n. \tag{5.24}$$

由(5.21)和(5.22)式求得 U 的第1行和 L 的第1列元素之后，依次取 $k=2,3,\cdots,n$，利用(5.23)和(5.24)式可求出 U 的主对角线及其上方和 L 的主对角线下方的全部元素，这也就求出了 U 和 L.

在记录 L 和 U 的元素时可采用表5-1所示的方式. 这种记录方式称为**紧凑格式**. 由(5.23)和(5.24)式可以看出，在计算 u_{kj} 和 l_{ik} 时已不再用 A 的前 $k-1$ 行和前 $k-1$ 列的元素. 因此，在计算机上，当不需要保留原矩阵 A 时，算出的 L 和 U 的元素可存放在 A 的相应的位置上，从而节省了存储单元.

表 5-1

u_{11}	u_{12}	……	u_{1n}
l_{21}	u_{22}	……	u_{2n}
l_{31}	l_{32}	⋱	
⋮	⋮		
l_{n1}	l_{n2}		u_{nn}

求得 A 的 Doolittle 分解后，便可利用(5.16)和(5.17)式解方

程组(5.1). 设 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$,由(5.16)式得

$$\begin{cases} y_1=b_1, \\ y_k=b_k-\sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}y_i, \quad k=2,3,\cdots,n \end{cases} \tag{5.25}$$

将求得的 y 代入(5.17)式,进行回代,求得方程组(5.1)的解

$$\begin{cases} x_n=y_n/u_{nn}, \\ x_k=\dfrac{1}{u_{kk}}\left(y_k-\sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j\right), \quad k=n-1,n-2,\cdots,1. \end{cases} \tag{5.26}$$

比较(5.21)、(5.23)式和(5.25)式可以看出,如果将 b 放在 A 的右边作为第 $n+1$ 列,在(5.21)和(5.23)式中当 $j=n+1$ 时便求得 y 的各元素. 若用紧凑格式记录,只需在表 5-1 的右边增加一列记录计算出的 y.

例 5.2 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix}.$$

作 A 的 Doolittle 分解,并解方程组 $Ax=b$.

解 将 b 放在 A 的右边作为第 5 列,计算出紧凑格式如表 5-2. 其中第一步用(5.21)式计算,第二步用(5.22)式计算,第三、五、七步用(5.23)式计算,第四、六步用(5.24)式计算. A 的 Doolittle 分解为

表 5-2

1	2	3	4	2	← 第一步
1	2	6	12	8	← 第三步
1	3	6	24	18	← 第五步
1	7	6	24	24	← 第七步
↑ 第二步	↑ 第四步	↑ 第六步			

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&3&1&0\\1&7&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&6&12\\0&0&6&24\\0&0&0&24\end{bmatrix}.$$

等价的上三角方程组为

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&6&12\\0&0&6&24\\0&0&0&24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\\18\\24\end{bmatrix}.$$

回代，得方程组的解 $x=(-1,\ 1,\ -1,\ 1)^T$.

二、追赶法

如果 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$的元素满足

$$a_{ij}=0,\quad 当\ |i-j|\geqslant 2\ 时,$$

则称 A 是**三对角矩阵**. 对应的方程组(5.1)称为**三对角方程组**. 三对角矩阵的一般形式为

$$A=\begin{bmatrix}a_1&c_1&&&&\\d_2&a_2&c_2&&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&d_{n-1}&a_{n-1}&c_{n-1}\\&&&&d_n&a_n\end{bmatrix}.\qquad(5.27)$$

在某些实际的数值计算中，如建立三次样条函数，用差分法解二阶常微分方程组的边值问题等，都要解三对角方程组.

设由(5.27)式给出的三对角矩阵 A 非奇异，并且 A 的各阶顺序主子阵都是非奇异矩阵. 对 A 作 Doolittle 分解 $A=LU$. 利用(5.21)～(5.24)式得

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_n & 1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}u_1 & c_1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & u_n\end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} u_1 = a_1, \\ l_i = d_i/u_{i-1}, \quad i=2,3,\cdots,n, \\ u_i = a_i - l_i c_{i-1}, \quad i=2,3,\cdots,n. \end{cases} \tag{5.28}$$

将(5.28)代入(5.25)和(5.26)得三对角方程组 $Ax=b$ 的求解公式

$$\begin{cases} y_1 = b_1, \\ y_k = b_k - l_k y_{k-1}, \quad k=2,3,\cdots,n, \end{cases} \tag{5.29}$$

$$\begin{cases} x_n = y_n/u_n, \\ x_k = \dfrac{1}{u_k}(y_k - c_k x_{k+1}), \quad k=n-1,n-2,\cdots,1. \end{cases} \tag{5.30}$$

利用公式(5.28)~(5.30)解三对角方程组的方法称为**追赶法**. 在追赶法中,计算 $u_1 \to l_2 \to u_2 \to l_3 \to \cdots \to l_n \to u_n$ 及 $y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$ 的过程称为"追"的过程,计算 $x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_1$ 的过程称为"赶"的过程.

例 5.3 用追赶法解三对角方程组

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 \\ 1 \\ -2 \\ 1\end{bmatrix}.$$

解 追的过程为

$$u_1 = a_1 = 2, \qquad l_2 = d_2/u_1 = -\frac{1}{2},$$

$$u_2 = a_2 - l_2 c_1 = \frac{5}{2}, \quad l_3 = d_3/u_2 = -\frac{4}{5},$$

$$u_3 = a_3 - l_3 c_2 = \frac{12}{5}, \quad l_4 = d_4/u_3 = -\frac{5}{4},$$

$$u_4 = a_4 - l_4 c_3 = \frac{5}{4};$$

$$y_1 = b_1 = 6, \qquad y_2 = b_2 - l_2 y_1 = 4,$$

$$y_3 = b_3 - l_3 y_2 = \frac{6}{5}, \quad y_4 = b_4 - l_4 y_3 = \frac{5}{2}.$$

赶的过程为

$$x_4 = y_4/u_4 = 2, \qquad x_3 = \frac{1}{u_3}(y_3 - c_3 x_4) = 3,$$

$$x_2 = \frac{1}{u_2}(y_2 - c_2 x_3) = 4, \quad x_1 = \frac{1}{u_1}(y_1 - c_1 x_2) = 5.$$

因此,方程组的解为 $x_1=5, x_2=4, x_3=3, x_4=2$.

§5.3 压缩映射原理

设 D 和 X 是两个集合,$D \subset X$,映射 $T: D \to X$. 若 $x^* \in D$ 满足 $Tx^* = x^*$,则称 x^* 是映射 T 的**不动点**.

例 5.4 设 $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的定义为:对任意 $x \in \mathbb{R}$,$Tx = x^2$. 于是,x^* 是 T 的不动点当且仅当 x^* 是方程 $x^2 = x$ 的实根. 因此 0 和 1 是 T 的不动点.

例 5.5 设 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的定义为:对任意 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Tx = (E - A)x + b.$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,$b \in \mathbb{R}^n$,$E$ 是 n 阶单位矩阵. 不难看出,x^* 是 T 的不动点当且仅当 x^* 是线性方程组

$$Ax = b$$

的解.

例 5.6 设 $T: C[a,b] \to C[a,b]$ 的定义为:对于任意的 $x \in C[a,b]$,

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_a^t K(s,x(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b]$$

其中 $x_0 \in \mathbb{R}$，$K(t,x)$是$[a,b]\times\mathbb{R}$ 上的连续函数. 于是，x^* 是 T 的不动点当且仅当 x^* 是积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_a^t K(s,x(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b]$$

的解.

由以上几个例子可以看出，某些问题解的讨论可以转化为映射的不动点来研究. 因此，不动点理论具有极为重要的意义.

定义 5.4 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间，$D\subset X$，$T: D\to X$. 如果存在常数 $\alpha\in[0,1)$，使得对一切 $x,y\in D$，都有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\alpha\|x-y\|,$$

则称映射 T 是 D 上的**压缩映射**，其中 α 称为压缩系数.

定理 5.2 若 $T: D\to X$ 是 D 上的压缩映射，则 T 是 D 上的连续映射.

证明 对任意 $x\in D$ 和任意收敛于 x 的序列$\{x^{(k)}\}\subset D$，由

$$\|Tx^{(k)}-Tx\|\leqslant\alpha\|x^{(k)}-x\|\to 0$$

知 $Tx^{(k)}\to Tx$，此处 α 是压缩系数. 因此 T 在 x 点连续. 再由 x 的任意性可知 T 在 D 上连续. 证毕.

定理 5.3 (Banach 压缩映射原理) 设$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间，D 是 X 的闭子集，$T: D\to X$ 是 D 上的压缩映射，$T(D)\subset D$，则 T 在 D 上存在唯一不动点，即存在唯一的 $x^*\in D$，满足 $Tx^*=x^*$.

证明 对任意 $x^{(0)}\in D$，由条件 $T(D)\subset D$，可按

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}, \qquad k = 0,1,2,\cdots, \tag{5.31}$$

构造出 D 中的一个序列$\{x^{(k)}\}$. 因为 T 是压缩映射，所以存在常数 $\alpha\in[0,1)$，使对一切 $k=1,2,\cdots$，都有

$$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| = \|Tx^{(k)}-Tx^{(k-1)}\|$$

$$\leqslant \alpha \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$$
$$= \alpha \| Tx^{(k-1)} - Tx^{(k-2)} \|$$
$$\leqslant \alpha^2 \| x^{(k-1)} - x^{(k-2)} \|$$
$$= \cdots \leqslant \alpha^k \| x^{(1)} - x^{(0)} \|.$$

从而，对任何 $l \in N$，都有

$$\| x^{(k+l)} - x^{(k)} \| \leqslant \| x^{(k+l)} - x^{(k+l-1)} \| + \| x^{(k+l-1)} - x^{(k+l-2)} \| + \cdots + \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|$$
$$\leqslant (\alpha^{k+l-1} + \alpha^{k+l-2} + \cdots + \alpha^k) \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$
$$\leqslant \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|. \tag{5.32}$$

由 $\alpha \in [0,1)$ 及(5.32)式可知，$\{x^{(k)}\}$ 是 Cauchy 序列. 又因为 D 是闭集，所以存在 $x^* \in D$，使得

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*.$$

再利用 T 的连续性得到

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \lim_{k \to \infty} T(x^{(k-1)}) = Tx^*.$$

这表明，x^* 是 T 的不动点.

设 $y^* \in D$ 也是 T 的不动点，由 T 的压缩性有

$$\| x^* - y^* \| = \| Tx^* - Ty^* \| \leqslant \alpha \| x^* - y^* \|.$$

因为 $\alpha \in [0,1)$，所以由上式得 $y^* = x^*$. 因此，T 在 D 上的不动点是唯一的. 证毕.

推论 在定理 5.3 的条件下，对任意 $x^{(0)} \in D$，由(5,31)得到的序列$\{x^{(k)}\}$都收敛于 T 的唯一不动点 x^*，并且有误差估计式

$$\| x^{(k)} - x^* \| \leqslant \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \tag{5.33}$$

及

$$\| x^{(k)} - x^* \| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|. \tag{5.34}$$

证明 由定理 5.3 的证明过程知，$\{x^{(k)}\}$收敛于 T 的唯一不动点 x^*. 在(5.32)式中令 $l \to \infty$，得误差估计式(5.33). 对任意 p

$\in N$ 有

$$\|x^{(k+p)}-x^{(k+p-1)}\| = \|Tx^{(k+p-1)}-Tx^{(k+p-2)}\|$$
$$\leqslant \alpha\|x^{(k+p-1)}-x^{(k+p-2)}\| = \alpha\|Tx^{(k+p-2)}-Tx^{(k+p-3)}\|$$
$$\leqslant \alpha^2\|x^{(k+p-2)}-x^{(k+p-3)}\| = \cdots \leqslant \alpha^p\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|.$$

于是，对任意 $l\in N$ 有

$$\begin{aligned}\|x^{(k+l)}-x^{(k)}\| &\leqslant \|x^{(k+l)}-x^{(k+l-1)}\| + \|x^{(k+l-1)}-x^{(k+l-2)}\| \\ &\quad + \cdots + \|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| \\ &\leqslant (\alpha^l+\alpha^{l-1}+\cdots+\alpha)\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\| \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha^{l-1})}{1-\alpha}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|.\end{aligned}$$

令 $l\to\infty$，得(5.34)式. 证毕.

§5.4 解线性方程组的迭代法

在理论上，直接法可以通过有限步运算求得方程组的精确解. 但是，在实际计算时，由于舍入误差的影响，所得到的解常常是近似解. 此外，在利用计算机计算时，由于受到存储量的限制，直接法只适宜解阶数不太高的方程组. 本节将介绍的迭代法，其基本思想是利用某种递推格式反复迭代构造一个无穷序列，使其收敛于方程组的解. 因此，迭代过程也就是逐次逼近方程组解的过程. 在实际计算中，利用迭代法解方程组只能通过有限次迭代求得方程组的近似解. 尽管如此，只要递推格式选择得好，总可使近似解达到预期的精度要求. 迭代法与直接法相比较，它具有计算程序简单，占用存储单元少等优点. 因此，对系数矩阵是大型(阶数很高)的，特别是大型稀疏(非零元素在全部元素中只占很小的比例)的线性方程组，更适宜采用迭代法.

一、迭代法的一般形式及其收敛性

设线性方程组(5.1)的系数矩阵 A 非奇异，从而方程组有唯

一解. 把 A 分解成两个矩阵之差

$$A=B-C,$$

其中 B 是非奇异的，代入(5.1)得等价方程组

$$x=Mx+f, \tag{5.35}$$

其中 $M=B^{-1}C$ ，$f=B^{-1}b$.

任取向量 $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ 作为方程组(5.1)解的初始近似，称为初始向量. 按照递推公式

$$x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+f,\quad k=0,1,\cdots, \tag{5.36}$$

产生一个序列 $\{x^{(k)}\}$，称为**迭代序列**，M 称为**迭代矩阵**，(5.36)式称为**迭代格式**. 若 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于某一向量 $x^*\in\mathbb{R}^n$，则称**迭代格式**(5.36)**收敛**. 显然，x^* 满足方程组(5.35)，因而 x^* 是方程组(5.1)的解. 此时，可取充分大的 k，用 $x^{(k)}$ 作为方程组(5.1)的解的近似值. 这种求方程组(5.1)解的方法称为**迭代法**.

只有收敛的迭代格式才可用来解线性方程组(5.1). 迭代格式的收敛性主要取决于迭代矩阵 M 的性质.

设 $x^*\in\mathbb{R}^n$ 是方程组(5.1)的解，则有

$$x^*=Mx^*+f.$$

于是

$$\begin{aligned}x^{(k)}-x^* &= M(x^{(k-1)}-x^*)=M^2(x^{(k-2)}-x^*)\\ &= \cdots = M^k(x^{(0)}-x^*).\end{aligned}$$

由此得到如下收敛性定理.

定理 5.4　迭代格式(5.36)对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}M^k=0.$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}M^k=0$ 的充分必要条件是 M 的谱半径 $\rho(M)<1$，所以又有下面收敛定理.

定理 5.5　迭代格式(5.36)对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛的充

分必要条件是 $\rho(M)<1$.

设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的某种范数，$\|M\|$ 是矩阵 M 的关于 $\mathbb{R}^n$ 中范数 $\|\cdot\|$ 的算子范数，映射 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为

$$Tx = Mx + f.$$

于是，对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$\|Tx - Ty\| = \|M(x-y)\| \leqslant \|M\| \|x-y\|.$$

因此，当 $\|M\|<1$ 时，映射 T 是 $\mathbb{R}^n$ 上的压缩映射. 利用 Banach 压缩映射原理及其推论，我们得到如下判断收敛性及估计误差的定理.

定理 5.6　设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的某种范数，$\|M\|$ 是矩阵 M 的关于 $\mathbb{R}^n$ 中范数 $\|\cdot\|$ 的算子范数. 如果 $\|M\|<1$，则迭代格式(5.36)对任意初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛于方程组(5.1)的解 x^*，且有误差估计式

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leqslant \frac{\|M\|^k}{1-\|M\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \tag{5.37}$$

及

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leqslant \frac{\|M\|}{1-\|M\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \tag{5.38}$$

由误差估计式(5.37)可知，$\|M\|$ 愈小，迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛愈快. 对于预先给定的精度要求 $\varepsilon>0$，可用(5.37)式事先确定出需要迭代多少次才能保证 $\|x^{(k)} - x^*\|<\varepsilon$.

由误差估计式(5.38)可知，在迭代过程中还可以随时利用 $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$ 来估计误差. 例如，若已知 $\|M\| = \frac{1}{2}$，对于预先给定的精度要求 $\varepsilon>0$，当 $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|<\varepsilon$ 时，有 $\|x^{(k)} - x^*\| <\varepsilon$，此时可终止迭代，并取 $x^{(k)}$ 作为方程组(5.1)的近似解.

二、Jacobi 迭代法

设方程组(5.1)的系数矩阵 A 的元素满足 $a_{ii} \neq 0, i=1,2,\cdots,n$. 把 A 分解为

$$A = D - L - U,$$

其中 $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$；$-L$ 是严格下三角矩阵（主对角线及其上方元素皆为 0），主对角线下方元素是 A 的对应元素；$-U$ 是严格上三角矩阵（主对角线及其下方元素皆为 0），主对角线上方元素是 A 的对应元素. 代入方程组(5.1)，得等价方程组

$$Dx=(L+U)x+b.$$

由于 D 可逆，方程组又可写成

$$x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b.$$

据此得到一个迭代格式

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b. \tag{5.39}$$

称之为 **Jacobi 迭代格式**. 由它所确定的迭代法称为 **Jacobi 迭代法**，其迭代矩阵

$$M=D^{-1}(L+U)=D^{-1}(D-A)$$

称为 Jacobi 迭代矩阵.

设 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T, k=0,1,\cdots$. 因为迭代格式(5.39)即为

$$x^{(k+1)}=D^{-1}[(D-A)x^{(k)}+b],$$

而

$$D^{-1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_{11}},\frac{1}{a_{22}},\cdots,\frac{1}{a_{nn}}\right),$$

所以 Jacobi 迭代格式的分量形式为

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\Big(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i\Big),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{5.40}$$

Jacobi 迭代格式是以 $M=D^{-1}(L+U)$ 为迭代矩阵的迭代格式. 关于一般迭代格式的收敛定理（定理 5.4，5.5，5.6）对 Jacobi 迭代格式都是适用的. 除此之外，这里再给出一个收敛定理.

定理 5.7　如果 A 是严格行（或列）对角占优矩阵，则 Jacobi 迭代格式收敛.

证明　由 A 严格行对角占优可知

$$\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<1,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因此，迭代矩阵 $M=D^{-1}(L+U)$ 的行范数

$$\|M\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1,$$

由定理 5.6，Jacobi 迭代格式收敛. 类似地可证明 A 是严格列对角占优的情形. 证毕.

例 5.7 用 Jacobi 迭代法解方程组

$$\begin{cases}64x_1-3x_2-x_3=14\\2x_1-90x_2+x_3=-5\\x_1+x_2+40x_3=20\end{cases},$$

当 $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty\leqslant10^{-6}$ 时终止迭代.

解 因为方程组的系数矩阵严格行对角占优，所以 Jacobi 迭代格式收敛. 利用(5.40)式得

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{64}(3x_2^{(k)}+x_3^{(k)}+14)\\[2mm]x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{90}(2x_1^{(k)}+x_3^{(k)}+5)\\[2mm]x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{40}(-x_1^{(k)}-x_2^{(k)}+20)\end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代 5 次得数据如下表.

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
0.218750	0.229167	0.229548	0.229547	0.229547
0.055556	0.065972	0.066128	0.066130	0.066130
0.500000	0.493142	0.492622	0.492608	0.492608

所以，方程组的近似解为

$$x_1=0.229547,\quad x_2=0.066130,\quad x_3=0.492608.$$

应该指出，改变方程组中方程或未知量的排列顺序，虽然并不改变方程组的解，但有时会改变迭代格式的收敛性. 例如，对于方程组

$$\begin{cases} 0.5x_1 + x_2 = -0.5 \\ x_1 + 0.5x_2 = 0.5 \end{cases},$$

其 Jacobi 迭代矩阵

$$\begin{aligned} M &= D^{-1}(D-A) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\rho(M)=2$. 所以，Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 2(-x_2^{(k)} - 0.5) \\ x_2^{(k+1)} = 2(-x_1^{(k)} + 0.5) \end{cases}$$

不收敛. 如果改变方程组中两个方程的排列顺序，得

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 = 0.5 \\ 0.5x_1 + x_2 = -0.5 \end{cases},$$

系数矩阵严格行对角占优，因此由它写出的 Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.5x_2^{(k)} + 0.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.5x_1^{(k)} - 0.5 \end{cases}$$

是收敛的.

三、Seidel 迭代法

Seidel 迭代格式是 Jacobi 迭代格式的变形，目的在于提高收敛速度. 按照 Jacobi 迭代格式，在进行第 $k+1$ 次迭代时是用 $x^{(k)}$ 的全部分量来计算 $x^{(k+1)}$的各个分量. 实际上，在计算 $x^{(k+1)}$的第 i 个分量 $x_i^{(k+1)}(i>1)$时，$x^{(k+1)}$的前 $i-1$ 个分量 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$已经算出. 一般来说，它们比 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$更接近精确解 x^* 的前 $i-1$ 个分量 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{i-1}^*$. 故用 $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 及时取代 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$参与迭代会得到更好的逼近 x^* 的效果. 根据这种想法，将 Jacobi 迭代格式(5.40)修改成

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i\right),\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{5.41}$$

称之为**Seidel 迭代格式**,由它所确定的迭代法称为 Seidel 迭代法.

为了分析 Seidel 迭代格式的收敛性,需要确定出迭代格式(5.41)的矩阵形式. 为此,将(5.41)式改写为

$$a_{ii}x_i^{(k+1)}+\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}=-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

其矩阵形式为

$$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b,$$

此处 D,L 和 U 的意义如前所述. 因为 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$,所以 $D-L$是非奇异矩阵,上式又可写成

$$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b.\tag{5.42}$$

这便是 Seidel 迭代格式的矩阵形式,迭代矩阵

$$M=(D-L)^{-1}U$$

称为 Seidel 迭代矩阵.

关于一般迭代格式的收敛定理(定理 5.4,5.5,5.6)对 Seidel 迭代格式都是适用的. 此处再给出两个收敛定理.

定理 5.8　如果 A 是严格行(或列)对角占优矩阵,则 Seidel 迭代格式收敛.

证明　设 Seidel 迭代格式不收敛,由定理 5.5,Seidel 迭代矩阵 M 的谱半径 $\rho(M)\geqslant 1$. 因此,M 必有一个特征值 λ 满足 $|\lambda|\geqslant 1$. 因为

$$\begin{aligned}\lambda E-M&=\lambda E-(D-L)^{-1}U\\&=\lambda(D-L)^{-1}\left(D-L-\frac{1}{\lambda}U\right),\end{aligned}$$

所以

$$\det(\lambda E-M)=\lambda^n\det(D-L)^{-1}\cdot\det\left(D-L-\frac{1}{\lambda}U\right).$$

由 $\det(\lambda E-M)=0$，$\lambda\neq 0$ 和 $\det(D-L)^{-1}\neq 0$ 得

$$\det(D-L-\frac{1}{\lambda}U)=0.$$

而由 A 严格行(或列)对角占优和 $|\lambda|\geqslant 1$ 可知 $(D-L-\frac{1}{\lambda}U)$ 仍是严格行(或列)对角占优矩阵. 因此

$$\det(D-L-\frac{1}{\lambda}U)\neq 0,$$

得出矛盾. 所以，Seidel 迭代格式收敛. 证毕.

定理 5.9 如果 A 是正定矩阵，则 Seidel 迭代格式收敛.

证明 由 A 正定知，$a_{ii}>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而，D 也是正定矩阵，$D-L$ 是非奇异矩阵. 又由 A 对称知，$U=L^T$. 从而迭代矩阵

$$M=(D-L)^{-1}L^T.$$

设 λ 是 M 的任一特征值，y 是对应的特征向量，则

$$(D-L)^{-1}L^Ty=\lambda y.$$

于是

$$L^Ty=\lambda(D-L)y. \tag{5.43}$$

而由 $A=D-L-L^T$ 得

$$L^T=-A+D-L=\frac{1}{2}(-A+D-L+L^T)$$

及

$$D-L=A+L^T=\frac{1}{2}(A+D-L+L^T).$$

代入(5.43)式，并用 y^H 左乘等式两边得

$$y^H(-A+D-L+L^T)y=\lambda y^H(A+D-L+L^T)y. \tag{5.44}$$

由 A 与 D 正定及 $y\neq 0$ 得

$$y^HAy=a>0, \qquad y^HDy=d>0.$$

设 $y^HLy=\alpha+\beta i$，则 $y^HL^Ty=\alpha-\beta i$. 于是，由(5.44)式得

$$\lambda=\frac{-a+d-2\beta i}{a+d-2\beta i}.$$

因为 $|-a+d|<|a+d|$，所以由上式得 $|\lambda|<1$. 根据 λ 的任意性，

得到 $\rho(M)<1$. 因此，Seidel 迭代格式收敛.　　　　证毕.

例 5.8　用 Seidel 迭代法解例 5.7 的方程组.

解　Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{64}(3x_2^{(k)}+x_3^{(k)}+14) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{90}(2x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}+5) \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{40}(-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}+20) \end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 进行迭代. 按照当 $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty\leqslant 10^{-6}$时终止迭代的要求，只需迭代 4 次. 数据见下表.

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
0.218750	0.229285	0.229547	0.229547
0.060417	0.066129	0.066130	0.066130
0.493021	0.492615	0.492608	0.492608

一般来说，应用 Jacobi 迭代法及 Seidel 迭代法解同一个线性方程组时，在两种迭代格式都收敛的情况下，后者收敛速度要比前者快些. 但是应该指出的是，Jacobi 迭代格式收敛不能保证 Seidel 迭代格式也收敛. 因此，不能绝对地说 Seidel 迭代格式优于 Jacobi 迭代格式. 在计算机上应用 Jacobi 迭代格式时，需要两组存储单元，用以存放相邻两次迭代结果 $x^{(k)}$和 $x^{(k+1)}$. 而用 Seidel 迭代格式时，求得 $x_i^{(k+1)}$ 之后就不再需要 $x_i^{(k)}$ 了，可让 $x_i^{(k+1)}$ 冲掉 $x_i^{(k)}$，因此只需一组存储单元. 这是 Seidel 迭代格式的又一个优点.

四、SOR 迭代法

为了提高收敛速度，关于 Seidel 迭代格式的一种改进是下面的迭代一校正格式：

$$\begin{cases} \tilde{x}_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i\right) \\ x_i^{(k+1)}=\omega\tilde{x}_i^{(k+1)}+(1-\omega)x_i^{(k)},\quad i=1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{5.45}$$

适当选择参数 ω,可以改善迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 的收敛速度. 当 $\omega=1$ 时,迭代格式(5.45)就是 Seidel 迭代格式.

将(5.45)的前式代入后式得

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right),$$

$$i=1,2,\cdots,n. \quad (5.46)$$

这个迭代格式称为**逐次超松驰迭代格式**,简称为 SOR(*Successive Over-Relaxation*)迭代格式,其中 ω 称为**松驰因子**.

由(5.46)式得

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} = a_{ii}x_i^{(k)} - \omega\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \omega b_i,$$

$$i = 1,2,\cdots,n.$$

写成矩阵形式为

$$(D-\omega L)x^{(k+1)}=[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)}+\omega b,$$

其中 D,L 和 U 如前所述. 于是得到

$$x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+\omega(D-\omega L)^{-1}b. \quad (5.47)$$

这便是 SOR 迭代格式的矩阵形式,其中迭代矩阵

$$M=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U].$$

对于 SOR 迭代格式,收敛定理 5.4,5.5,5.6 仍然适用. 下面再给出两个收敛性定理.

定理 5.10 若 SOR 迭代格式(5.47)收敛,则松驰因子 $\omega\in(0,2)$.

证明 对于 SOR 迭代格式的迭代矩阵 M,有

$$\begin{aligned}\det M &=\det(D-\omega L)^{-1}\cdot\det[(1-\omega)D+\omega U]\\ &=\det D^{-1}\cdot\det[(1-\omega)D]=(1-\omega)^n.\end{aligned}$$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 M 的特征值,则

$$\det M=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

从而

$$\rho(M) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \right)^{\frac{1}{n}} = |1-\omega| .$$

因为迭代格式收敛，$\rho(M)<1$，所以由上式得

$$0<\omega<2.$$

证毕.

定理 5.11 若 A 是正定矩阵，则 SOR 迭代格式(5.47)收敛的充分必要条件是 $\omega \in (0,2)$.

必要性由定理 5.10 可得，充分性的证明可采用定理 5.9 的证明方法完成.

例 5.9 用 SOR 迭代法，取 $\omega=1.25$，解方程组

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2=24 \\ 3x_1+4x_2-x_3=30 \\ -x_2+4x_3=-24 \end{cases} .$$

解 SOR 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-0.25x_1^{(k)}-0.9375x_2^{(k)}+7.5 \\ x_2^{(k+1)}=-0.9375x_1^{(k+1)}-0.25x_2^{(k)}+0.3125x_3^{(k)}+9.375 \\ x_3^{(k+1)}=0.3125x_2^{(k+1)}-0.25x_3^{(k)}-7.5 \end{cases} .$$

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代 7 次，所得结果见下表.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	6.3125000	3.5195313	−6.6501465
2	2.6223144	3.9585266	−4.6004238
3	3.1333027	4.0102646	−5.0966864
4	2.9570513	4.0074838	−4.9734897
5	3.0037211	4.0029250	−5.0057135
6	2.9963275	4.0009262	−4.9982822
7	3.0000498	4.0002586	−5.0003486

若取 $\omega=1$，即用 Seidel 迭代法，迭代 7 次得到

$$\begin{cases} x_1^{(7)} = 3.0134110 \\ x_2^{(7)} = 3.9888241 \\ x_3^{(7)} = -5.0027940 \end{cases}.$$

方程组的精确解是 $x^* = (3,4,-5)^T$. 比较以上结果可以看出，取 $\omega=1.25$ 的 SOR 迭代法要比 Seidel 迭代法收敛得快. 事实上，继续迭代下去，要达到七位小数的近似值，Seidel 迭代法要迭代 34 次. 而取 $\omega=1.25$ 的 SOR 迭代法只需迭代 14 次.

由以上例题可以看出，松弛因子 ω 对 SOR 迭代法的收敛速度有重大影响，因此需要探讨如何确定最优的松弛因子问题. 在某些特殊情况下已有一些理论分析的结果. 这里只对一种十分特殊的情形列出结论.

定理 5.12　如果方程组(5.1)的系数矩阵 A 是三对角正定矩阵，M_1 和 M_2 分别是方程组(5.1)的 Jacobi 迭代矩阵和 Seidel 迭代矩阵，则 $\rho(M_2)=[\rho(M_1)]^2<1$，且 SOR 迭代法中的松弛因子 ω 的最优值为

$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(M_2)}},$$

此时 SOR 迭代矩阵 M 的谱半径 $\rho(M)=\omega_{opt}-1$.

例 5.10　对于例 5.9 的方程组，系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

不难看出，它是三对角正定矩阵. 其 Jacobi 迭代矩阵

$$M_1 = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix},$$

从而

$$\det(\lambda E-M_1)=\lambda(\lambda^2-0.625),$$
$$\rho(M_1)=\sqrt{0.625}\approx 0.790.$$

根据定理 5.12 得 Seidel 迭代矩阵 M_2 的谱半径和最优松驰因子 ω_{opt}分别为

$$\rho(M_2)=0.625,$$
$$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-0.625}}\approx 1.24,$$

一般情况下，ω_{opt}难以预先确定. 在实际计算时，可采用试算的方法，选择较好的松驰因子. 从同一初始向量出发，在(0,2)上取两个不同的松驰因子，迭代相同的次数，比较残余向量 $r^{(k)}=b-Ax^{(k)}$，保留使 $\|r^{(k)}\|$ 较小的松驰因子. 这种方法既简单又有效.

§5.5 非线性方程组迭代法的一般理论

一、简单迭代格式及其适定性

考虑非线性方程组

$$F(x)=0, \tag{5.48}$$

其中 $F: D\to \mathbb{R}^n$，而 $D\subset \mathbb{R}^n$. 解方程组(5.48)，即求 $x^*\in D$，使得 $F(x^*)=0$. 将方程组(5.48)写成某种等价形式

$$x=G(x). \tag{5.49}$$

取 x^* 的初始近似 $x^{(0)}$，称为初始向量，按照递推公式

$$x^{(k+1)}=G(x^{(k)}),\qquad k=0,1,\cdots, \tag{5.50}$$

产生一个序列$\{x^{(k)}\}$，称为迭代序列. $G: D\to \mathbb{R}^n$ 称为迭代算子. (5.50)式称为**简单迭代格式**，以下简称迭代格式. 若$\{x^{(k)}\}$收敛于方程组(5.49)的解，则称迭代格式(5.50)收敛. 此时可取充分大的 k，用 $x^{(k)}$ 作为方程组(5.49)解的近似值. 这种求方程组解的方法称为简单迭代法.

对于给定的方程组(5.48)，一般可用多种途径构造迭代格式，

即可选择不同的迭代算子 G. 其中最简单的是取 $G(x)=F(x)+x$. 然而，如果 G 选择不当，给定 $x^{(0)}\in D$ 之后，可能迭代到某一步会出现 $G(x^{(k)})\notin D$，这将使迭代无法继续进行.

定义 5.5 如果对任意取定的初始近似 $x^{(0)}\in D$，按(5.50)生成的迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 满足 $x^{(k)}\in D, k=0,1,\cdots$，则称迭代格式(5.50)是**适定的**.

例 5.11 考虑方程

$$xe^x-1=0.$$

将方程改写成

$$x=e^{-x}.$$

取初始近似 $x^{(0)}=0.5$ 和迭代格式

$$x^{(k+1)}=e^{-x^{(k)}},\qquad k=0,1,\cdots,$$

经 20 次迭代得数据如下表.

k	$x^{(k)}$	k	$x^{(k)}$	k	$x^{(k)}$	k	$x^{(k)}$
1	0.60653	6	0.56486	11	0.56728	16	0.56714
2	0.54524	7	0.56844	12	0.56707	17	0.56715
3	0.57970	8	0.56641	13	0.56719	18	0.56714
4	0.56006	9	0.56756	14	0.56712	19	0.56714
5	0.57117	10	0.56691	15	0.56716	20	0.56714

取 $x^{(20)}=0.56714$ 为方程近似解.

还可将方程改写为另一种形式

$$x=-\ln x.$$

仍取初始近似 $x^{(0)}=0.5$，而迭代格式取为

$$x^{(k+1)}=-\ln x^{(k)}.$$

迭代 4 次得 $x^{(4)}=-0.00371<0$，跳出了 $\ln x$ 的定义域，迭代不能继续进行. 这个迭代格式是不适定的.

二、迭代格式的收敛性与收敛阶

为了用迭代法求得方程组(5.48)的解或解的近似值，除了要求迭代格式适定之外，还要求迭代格式收敛. 迭代格式的收敛性主要也取决迭代算子的性质. 由于方程组(5.49)的解即为迭代算子 G 的不动点，因此可借助于不动点理论研究迭代格式的收敛性. 根据定理 5.3 及其推论，得到如下判断迭代格式(5.50)收敛性及误差估计的定理.

定理 5.13　设 D 是$\mathbb{R}^n$ 中的闭集，$G: D\to\mathbb{R}^n$ 是 D 上的压缩映射，压缩系数为 α，且 $G(D)\subset D$. 则 G 有唯一不动点 $x^*\in D$，迭代格式(5.50)适定，且对任意初始向量 $x^{(0)}\in D$，由(5.50)式生成的迭代序列$\{x^{(k)}\}$收敛于 x^*；此外，误差估计式(5.33)和(5.34)式成立.

应用迭代法解非线性方程组，为了保证迭代格式的适定性与收敛性，初始向量的选择也十分重要.

定义 5.6　设 $x^*\in D$ 是 $G: D\to\mathbb{R}^n$ 的不动点，若存在开球

$$B(x^*,\delta)=\{x\mid \|x-x^*\|<\delta\},$$

使得对任意 $x^{(0)}\in B(x^*,\delta)$，按迭代格式(5.50)生成的迭代序列$\{x^{(k)}\}\subset D$，且收敛于 x^*，则称迭代格式(5.50)在 x^* 附近具有**局部收敛性**.

下面是两个关于迭代格式(5.50)局部收敛性的定理.

定理 5.14　设 $x^*\in D$ 是 $G: D\to\mathbb{R}^n$ 的不动点，若存在开球 $B(x^*,\delta)\subset D$ 及 $\alpha\in[0,1)$，使得对任意 $x\in B(x^*,\delta)$都有

$$\|G(x)-x^*\|\leqslant\alpha\|x-x^*\|, \tag{5.51}$$

则对任意初始向量 $x^{(0)}\in B(x^*,\delta)$，按迭代格式(5.50)生成的迭代序列$\{x^{(k)}\}\subset B(x^*,\delta)$，且收敛于 x^*.

证明　假设 $x^{(k)}\in B(x^*,\delta)$，由(5.51)式得

$$\|x^{(k+1)}-x^*\|=\|G(x^{(k)})-x^*\|\leqslant\alpha\|x^{(k)}-x^*\|<\delta,$$

因此 $x^{(k+1)}\in B(x^*,\delta)$. 注意到 $x^{(0)}\in B(x^*,\delta)$，根据归纳法原理得

$\{x^{(k)}\}\subset B(x^*,\delta)$. 利用(5.51)式逐次递推可得

$$\|x^{(k)}-x^*\|\leqslant\alpha^k\|x^{(0)}-x^*\|.$$

再由 $\alpha\in[0,1)$得到

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*.$$

证毕.

定理 5.15 设 $x^*\in D$ 是 $G:D\to\mathbb{R}^n$ 的不动点,若存在 x^* 的邻域 $B(x^*,\delta_0)\subset D$,使得在 $B(x^*,\delta_0)$ 内 $G(x)$ 连续可微,且 $\|G'(x^*)\|_\infty<1$,则存在开球 $B(x^*,\delta)\subset B(x^*,\delta_0)$,使得对任意初始向量 $x^{(0)}\in B(x^*,\delta)$,按迭代格式(5.50)生成的迭代序列 $\{x^{(k)}\}\subset B(x^*,\delta)$,且收敛于 x^*.

证明 由假设条件,存在 $\alpha\in[0,1)$和开球 $B(x^*,\delta)\subset B(x^*,\delta_0)$,使得对一切 $x\in B(x^*,\delta)$都有

$$\|G'(x)\|_\infty\leqslant\alpha<1.$$

设 $G(x)=(g_1(x),\cdots,g_n(x))^T$, $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)^T$. 对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in B(x^*,\delta)$,由多元函数 Taylor 公式有

$$g_i(x)-g_i(x^*)=\frac{\partial g_i(\xi_i)}{\partial x_1}(x_1-x_1^*)+\cdots+\frac{\partial g_i(\xi_i)}{\partial x_n}(x_n-x_n^*),$$

其中 $\xi_i=(1-\theta_i)x^*+\theta_i x$, $\theta_i\in(0,1)$, $i=1,2,\cdots,n$. 写成矩阵形式为

$$G(x)-G(x^*)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1(\xi_1)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(\xi_1)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial g_n(\xi_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n(\xi_n)}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-x_1^*\\ \vdots\\ x_n-x_n^*\end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|G(x)-x^*\|_\infty&=\|G(x)-G(x^*)\|_\infty\\&\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right|\|x-x^*\|_\infty\\&\leqslant\alpha\|x-x^*\|_\infty.\end{aligned}$$

再应用定理 5.14 便得到本定理的结论， 证毕.

评价迭代格式优劣的重要标志之一是收敛速度，通常用如下定义的收敛阶刻划收敛速度.

定义 5.7 设向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于x^*，若存在$p\geqslant 1$和$\alpha>0$，使得当$k\geqslant k_0$时

$$\| x^{(k+1)}-x^* \| \leqslant \alpha \| x^{(k)}-x^* \|^p, \tag{5.52}$$

则称$\{x^{(k)}\}$**至少 p 阶收敛**. 当$p=1$而$\alpha\in(0,1)$时称$\{x^{(k)}\}$**至少线性收敛**. 当$p=2$时称$\{x^{(k)}\}$**至少平方收敛**. 如果对一切$p\leqslant p_0$，(5.52)式成立，而对一切$p>p_0$，(5.52)式不成立，则称$\{x^{(k)}\}$是 p_0 **阶收敛的**. 如果当$k\geqslant k_0$时$x^{(k)}=x^*$成立，或

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\| x^{(k+1)}-x^* \|}{\| x^{(k)}-x^* \|^p}=0,$$

则称$\{x^{(k)}\}$是**超 p 阶收敛**的，当$p=1$时称$\{x^{(k)}\}$**超线性收敛**，当$p=2$时称$\{x^{(k)}\}$**超平方收敛**.

由不等式(5.51)可知，在定理 5.14 或定理 5.15 的假设下，按迭代格式(5.50)生成的迭代序列至少是线性收敛的.

局部收敛性要求在不动点附近选取初始向量. 然而，对于一个具体的形如(5.49)的方程组，不动点是否存在，大致在什么范围存在，往往并不清楚，这就给初始向量的选取带来了困难. 从实用角度来说，对大范围收敛性的研究更为有意义. 所谓大范围收敛性，指的是在求解区域上任意选取初始向量，迭代序列都收敛. 为了保证大范围的收敛性，迭代算子应具有某些特殊性质.

对于$\mathbb{R}^n$中的两个向量

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T,$$

如果

$$x_i\leqslant y_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则称x与y在自然编序下是可比较的，并记为$x\leqslant y$.

对于$\mathbb{R}^n$中的序列$\{x^{(k)}\}$，如果满足

$$x^{(k)} \leqslant x^{(k+1)}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,$$

则称$\{x^{(k)}\}$是单调增序列；如果满足

$$x^{(k)} \geqslant x^{(k+1)}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,$$

则称$\{x^{(k)}\}$是单调减序列.

设$x,y\in\mathbb{R}^n$满足$x\leqslant y$. 记

$$[x,y] = \{\xi | x \leqslant \xi \leqslant y\},$$

并称为**有序区间**.

设$G: D\to\mathbb{R}^n, D\subset\mathbb{R}^n$. 若对任意$x,y\in D$且$x\leqslant y$都有$G(x)\leqslant G(y)$，则称$G$在$D$上**保序**.

设$G: D\to\mathbb{R}^n$是D上的保序算子，有序区间$[x^{(0)},y^{(0)}]\subset D$，且$G(x^{(0)})\geqslant x^{(0)}, G(y^{(0)})\leqslant y^{(0)}$. $\{x^{(k)}\}$和$\{y^{(k)}\}$分别是以$x^{(0)}$和$y^{(0)}$为初始向量按迭代格式(5.50)生成的迭代序列，则有如下结论.

定理 5.16 $\{x^{(k)}\}$和$\{y^{(k)}\}$都在$[x^{(0)},y^{(0)}]$上收敛，即存在$x^*,y^*\in[x^{(0)},y^{(0)}]$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*, \qquad \lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y^*,$$

且$x^*\leqslant y^*$. 如果G在D上又是连续的，则x^*和y^*都是G的不动点，且G在$[x^{(0)},y^{(0)}]$上的不动点都落在$[x^*,y^*]$上.

证明 由G的保序性，$G(x^{(0)})\geqslant x^{(0)}, G(y^{(0)})\leqslant y^{(0)}$和$x^{(0)}\leqslant y^{(0)}$得

$$x^{(1)} \geqslant x^{(0)}, \qquad y^{(1)} \leqslant y^{(0)},$$
$$x^{(1)}=G(x^{(0)})\leqslant G(y^{(0)})=y^{(1)}.$$

设对某个$k\in\mathbb{N}$有

$$x^{(k)} \geqslant x^{(k-1)}, \quad y^{(k)} \leqslant y^{(k-1)}, \quad x^{(k)} \leqslant y^{(k)}, \tag{5.53}$$

则

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}) \geqslant G(x^{(k-1)}) = x^{(k)},$$
$$y^{(k+1)}=G(y^{(k)})\leqslant G(y^{(k-1)})=y^{(k)},$$
$$x^{(k+1)}=G(x^{(k)})\leqslant G(y^{(k)})=y^{(k+1)},$$

于是，根据归纳法原理，(5.53)式对一切 $k\in N$ 都成立. 因此，$\{x^{(k)}\}$是单调增序列，$\{y^{(k)}\}$是单调减序列，且

$$x^{(k)}\leqslant y^{(k)},\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

设 $x_i^{(k)}$ 和 $y_i^{(k)}$ 分别是 $x^{(k)}$和 $y^{(k)}$的第 i 个分量，$i=1,2,\cdots,n$，则$\{x_i^{(k)}\}$是单增以 $y_i^{(0)}$ 为上界的数列，$\{y_i^{(k)}\}$是单减以 $x_i^{(0)}$ 为下界的数列，且

$$x_i^{(k)}\leqslant y_i^{(k)},\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

由单调有界准则，存在实数 x_i^* 和 y_i^*，使得

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*,\quad \lim_{k\to\infty}y_i^{(k)}=y_i^*,$$

且 $x_i^{(0)}\leqslant x_i^*\leqslant y_i^*\leqslant y_i^{(0)}$. 记

$$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T,\quad y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*)^T,$$

则有

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*,\quad \lim_{k\to\infty}y^{(k)}=y^*,$$

且 $x^{(0)}\leqslant x^*\leqslant y^*\leqslant y^{(0)}$.

如果 G 在 D 上连续，在式

$$x^{(k+1)}=G(x^{(k)}),\quad y^{(k+1)}=G(y^{(k)})$$

中令 $k\to\infty$得

$$x^*=G(x^*),\qquad y^*=G(y^*).$$

因此，x^*和 y^*都是 G 的不动点.

设 $z^*\in[x^{(0)},y^{(0)}]$是 G 的一个不动点，由 $x^{(0)}\leqslant z^*\leqslant y^{(0)}$，利用归纳法易证

$$x^{(k)}\leqslant z^*\leqslant y^{(k)},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

令 $k\to\infty$得

$$x^*\leqslant z^*\leqslant y^*,$$

即 $z^*\in[x^*,y^*]$. 证毕.

根据定理 5.16，若 G 是保序算子，只要能在 D 中找到满足定理条件的两个点 $x^{(0)}$和 $y^{(0)}$，无论以 $x^{(0)}$还是以 $y^{(0)}$作为初始向量，

用迭代格式(5.50)生成的的迭代序列都必收敛于方程组(5.49)的解.

§5.6 解非线性方程组的 Newton 法

一、Newton 格式

Newton 法是根据对非线性方程组逐次线性化的思想建立起来的一种迭代法.

设 $x^* \in D$ 是方程组(5.48)的解,$x^{(k)} \in D$ 是近似解. 若 $F(x)$ 在 $x^{(k)}$ 附近可微,则在 $x^{(k)}$ 附近可将 $F(x)$ 线性化为

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}).$$

因此,在 $x^{(k)}$ 附近方程组(5.48)近似地简化成线性方程组

$$F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0. \tag{5.54}$$

当 $F'(x^{(k)})$ 非奇异时,方程组(5.54)存在唯一解,记其为 $x^{(k+1)}$. 因此,得到

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \tag{5.55}$$

这是一个迭代格式,称为 **Newton 格式**或 Newton 公式.

在 Newton 格式中,含有 $[F'(x^{(k)})]^{-1}$. 为了避免求逆矩阵的运算,将(5.55)式改写为

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + y^{(k)} \\ F'(x^{(k)}) y^{(k)} + F(x^{(k)}) = 0 \end{cases}, \tag{5.56}$$

称其为**实用 Newton 格式**. 实用 Newton 格式通过解线性方程组求出 $y^{(k)}$,避免了求 $F'(x^{(k)})$ 的逆矩阵.

对于一元非线性方程

$$f(x) = 0, \tag{5.57}$$

Newton 格式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

在 xy 平面上，方程(5.57)的解是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标，而 $x^{(k+1)}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P_k(x^{(k)},f(x^{(k)}))$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标. 因此，迭代过程是逐次以切线代替曲线，用切线与 x 轴交点的横坐标 $x^{(k)}$ 逼近曲线与 x 轴交点的横坐标 x^* 的过程，如图 5－1 所示. 所以，Newton 法又称为**切线法**.

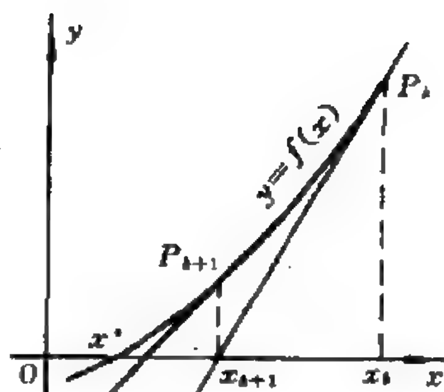

图 5-1

二、局部收敛定理

定理 5.17 设 $x^*\in D$ 是方程组(5.48)的解，$F(x)$ 在开球 $B(x^*,\delta_0)\subset D$ 上连续可微，且 $F'(x^*)$ 非奇异，则存在开球 $B(x^*,\delta)\subset B(x^*,\delta_0)$，使得对任意初始向量 $x^{(0)}\in B(x^*,\delta)$，按 Newton 格式(5.55)生成的迭代序列 $\{x^{(k)}\}\subset B(x^*,\delta)$，且超线性收敛于 x^*.

证明 设

$$G(x)=x-[F'(x)]^{-1}F(x)\ ,$$

则 x^* 是 G 的不动点，且 Newton 格式(5.55)可视为求 G 的不动点的迭代格式(5.50). 由 F 在 $B(x^*,\delta_0)$ 上连续可微和 $F'(x^*)$ 非奇异可知，存在开球 $B(x^*,\eta)\subset B(x^*,\delta_0)$，使得对任意 $x\in B(x^*,\eta)$，$F'(x)$ 都是非奇异的. 从而，G 在 $B(x^*,\eta)$ 上有定义.

记

$$\beta=\|[F'(x^*)]^{-1}\|$$

对任意 $\varepsilon\in(0,\frac{1}{4\beta})$，由导算子的定义，$F(x^*)=0$ 及 $F'(x)$ 在 x^* 的连续性可知，存在 $\delta\in(0,\eta]$，使得对任意 $x\in B(x^*,\delta)\subset B(x^*,\eta)$ 都有

$$\| F(x)-F'(x^*)(x-x^*) \| \leqslant \varepsilon \| x-x^* \| \tag{5.58}$$

及

$$\| F'(x)-F'(x^*) \| \leqslant \varepsilon. \tag{5.59}$$

从而有

$$\begin{aligned} \| [F'(x)]^{-1} \| &\leqslant \| [F'(x)]^{-1}-[F'(x^*)]^{-1} \| + \| [F'(x^*)]^{-1} \| \\ &\leqslant \| [F'(x)]^{-1} \| \| F'(x^*)-F'(x) \| \\ &\quad \cdot \| [F'(x^*)]^{-1} \| + \| [F'(x^*)]^{-1} \| \\ &\leqslant \varepsilon\beta \| [F'(x)]^{-1} \| + \beta. \end{aligned}$$

由此得到

$$\| [F'(x)]^{-1} \| \leqslant \frac{\beta}{1-\varepsilon\beta} < 2\beta. \tag{5.60}$$

因为

$$\begin{aligned} G(x)-x^* &= x-x^*-[F'(x)]^{-1}F(x) \\ &= -[F'(x)]^{-1}[F'(x^*)-F'(x)](x-x^*) \\ &\quad -[F'(x)]^{-1}[F(x)-F'(x^*)(x-x^*)], \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \| G(x)-x^* \| \leqslant{} & \| [F'(x)]^{-1} \| \| F'(x^*)-F'(x) \| \| x-x^* \| \\ & + \| [F'(x)]^{-1} \| \| F(x)-F'(x^*)(x-x^*) \|. \end{aligned} \tag{5.61}$$

于是，利用(5.58)～(5.60)式，对任意 $x \in B(x^*, \delta)$ 都有

$$\| G(x)-x^* \| < 4\beta\varepsilon \| x-x^* \|.$$

而由 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4\beta})$ 得 $0 < 4\beta\varepsilon < 1$. 根据定理 5.14，对任意初始向量 $x^{(0)} \in B(x^*, \delta)$，按 Newton 格式(5.55)生成的迭代序列有 $\{x^{(k)}\} \subset B(x^*, \delta)$，且收敛于 x^*.

因为 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^*，所以对任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4\beta})$，按照前面的方法可证明存在 $K \in N$，使得对一切 $k > K$ 都有

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| = \| G(x^{(k)}) - x^* \| < 4\beta\varepsilon \| x^{(k)} - x^* \|.$$

由此得到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\| x^{(k+1)} - x^* \|}{\| x^{(k)} - x^* \|} = 0.$$

因此，$\{x^{(k)}\}$超线性收敛于x^*. 证毕.

定理 5.18 在定理5.17的条件下，若还有

$$\| F'(x)-F'(x^*) \|_\infty \leqslant \alpha \| x-x^* \|_\infty,\ x\in B(x^*,\delta_0), \tag{5.62}$$

其中$\alpha>0$，则对任意初始向量$x^{(0)}\in B(x^*,\delta)$，按Newton格式(5.55)生成的迭代序列$\{x^{(k)}\}$至少平方收敛于x^*.

证明 收敛性已由定理5.17给出. 设$F(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))^T$，$x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)^T$. 对任意$x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in B(x^*,\delta)$，由多元函数Taylor公式及$f_i(x^*)=0$得

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j}(x_j - x_j^*),$$

其中$\xi_i=(1-\theta_i)x^*+\theta_i x$, $\theta_i\in(0,1)$, $i=1,2,\cdots,n$. 写成矩阵形式为

$$F(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\xi_1)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\xi_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\xi_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\xi_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{aligned} &\| F(x)-F'(x^*)(x-x^*) \|_\infty \\ \leqslant &\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} \right| \| x - x^* \|_\infty. \end{aligned}$$

利用(5.62)式得

$$\| F(x)-F'(x^*)(x-x^*) \|_\infty \leqslant \alpha \| x-x^* \|_\infty^2.$$

代入(5.61)式，并再利用(5.62)式得到

$$\| G(x)-x^* \|_\infty < 4\beta\alpha \| x-x^* \|_\infty^2.$$

于是

$$\| x^{(k+1)}-x^* \|_\infty = \| G(x^{(k)})-x^* \|_\infty < 4\beta\alpha \| x^{(k)}-x^* \|_\infty^2.$$

因此，$\{x^{(k)}\}$至少平方收敛于 x^*. 证毕.

以上两个收敛定理表明，按 Newton 格式迭代可能会得到很快的收敛速度. 在定理 5.18 条件下，按 Newton 格式生成的迭代序列至少平方收敛于方程组的解. 因此，通常称 Newton 格式是平方收敛的.

例 5.12 用 Newton 法解方程

$$xe^x - 1 = 0.$$

解 设 $f(x)=xe^x-1$，则 $f'(x)=(x+1)e^x$. 因此，Newton 格式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)}e^{x^{(k)}} - 1}{(x^{(k)} + 1)e^{x^{(k)}}},$$

即

$$x^{(k+1)} = \frac{(x^{(k)})^2 + e^{-x^{(k)}}}{1 + x^{(k)}}.$$

取初始值 $x^{(0)}=0.5$，迭代 4 次，数据如下表.

k	1	2	3	4
$x^{(k)}$	0.57102	0.56716	0.56714	0.56714

与例 5.11 比较，这里的收敛速度显然快得多.

例 5.13 用 Newton 法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 \end{cases},$$

其中 $1\leqslant x_1\leqslant 2$，$0.5\leqslant x_2\leqslant 1.5$.

解 设 $F(x)=(x_1+2x_2-3,\ 2x_1^2+x_2^2-5)^T$，则

$$F'(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}.$$

因此，实用 Newton 格式为

$$
\begin{cases}
x^{(k+1)} = x^{(k)} + y^{(k)} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} - 3 \\ 2(x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k)})^2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{cases}
$$

取初始向量 $x^{(0)}=(1.5,\ 1.0)^T$，迭代 4 次，数据如下表.

k	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	1.5000	1.4881	1.4880	1.4880
$x_2^{(k)}$	0.75000	0.75595	0.75598	0.75598

三、Newton 格式的变形

应用 Newton 格式解方程组(5.48)，要求 $F(x)$ 可微且在迭代过程中保持 $F'(x^{(k)})$ 非奇异. 此外，在定理 5.17 或 5.18 的假设条件下，Newton 格式仅具有局部收敛性. 这给初始向量的选择带来了困难. 这些都使 Newton 格式的实际应用受到局限. 下面从放宽限制及简化计算等不同角度，给出 Newton 格式的几种变形格式.

1. 带阻尼因子的 Newton 格式

为了克服 $F'(x^{(k)})$ 的奇异性或病态程度，在格式(5.55)中引进阻尼因子 η_k，得到带有阻尼因子的 Newton 格式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-[F'(x^{(k)})+\eta_k E]^{-1}F(x^{(k)}).$$

η_k 的选择，要实现矩阵 $F'(x^{(k)})+\eta_k E$ 严格行(或列)对角占优，以保证它非奇异且病态程度不十分严重.

2. 下降 Newton 格式

为了放宽对初始向量的要求，在格式(5.55)中引进下降因子 ω_k，得到下降 Newton 格式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\omega_k[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}). \qquad (5.63)$$

ω_k 的选择，要保证

$$\| F(x^{(k+1)}) \| < \| F(x^{(k)}) \| .$$

通常在(0,1)内选择 ω_k. 当 $\omega_k=1$ 时，格式(5.63)就是 Newton 格式，下降 Newton 格式具有大范围收敛性.

3. 简化 Newton 格式

为了避免每次迭代都计算逆矩阵$[F'(x^{(k)})]^{-1}$,可考虑整个迭代过程自始至终取 $F'(x^{(k)})$ 为 $F'(x^{(0)})$,这就是简化 Newton 格式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-[F'(x^{(0)})]^{-1}F(x^{(k)}). \tag{5.64}$$

简化 Newton 格式简单,计算量小.但收敛速度慢,仅是线性收敛.

4. 修正 Newton 格式

综合 Newton 格式(5.55)收敛快及简化 Newton 格式(5.64)计算量小的优点,可构成下述修正 Newton 格式

$$\begin{cases} x^{(k,0)}=x^{(k)} \\ x^{(k,j)}=x^{(k,j-1)}-[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k,j-1)}) \quad j=1,2,\cdots,m. \\ x^{(k+1)}=x^{(k,m)} \end{cases}$$

修正 Newton 格式是一种复合格式,每次迭代要调用简化 Newton 格式 m 次.在一定条件下,修正 Newton 格式是 $m+1$ 阶收敛的.从收敛速度及每次迭代计算量综合考虑,修正 Newton 格式是比 Newton 格式更有效的方法.实用中通常取 $m=2$.

5. 离散 Newton 格式

设 $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^T$.按定义

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}=\lim_{h_j\to 0}\frac{1}{h_j}[f_i(x+h_je_j)-f_i(x)],$$

其中 $h_j\in\mathbb{R}$,而 $e_j\in\mathbb{R}^n$ 是第 j 个分量为 1 的单位向量.记

$$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^T$$

$$a_{ij}=\frac{1}{h_j}[f_i(x+h_je_j)-f_i(x)],$$

$$J(x,h)=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

则当 $\|h\|$ 充分小时

$$F'(x)\approx J(x,h).$$

于是为避免算偏导数,以 $J(x,h)$ 代替 $F'(x)$,得离散 Newton 格式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-[J(x^{(k)},h^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}).$$

在一定条件下,离散 Newton 格式是超线性收敛的. 实用中通常取

$$h_j^{(k)} = \| F(x^{(k)}) \| h_j, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

其中 $h_j \neq 0$ 是不依赖于 k 的常数.

习 题 五

1. 用顺序 Gauss 消去法解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ 3x_1+x_2+2x_3=6 \\ x_1+2x_2+2x_3=5 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_4=4 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=-3 \\ -x_1+2x_2+3x_3-x_4=4 \end{cases}$.

2. 分别用顺序 Gauss 消去法和列主元素 Gauss 消去法解下列方程组,计算过程取 4 位有效数字. 把所得解代入方程组检验哪种方法的结果较精确.

$$\begin{cases} 0.012x_1 + 0.01x_2 + 0.167x_3 = 0.6781 \\ x_1 + 0.8334x_2 + 5.91x_3 = 12.1 \\ 3200x_1 + 1200x_2 + 4.2x_3 = 981 \end{cases}.$$

3. 计算下列矩阵关于行范数的条件数.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$; (2) $B=\begin{bmatrix} 4.56 & 2.18 \\ 2.79 & 1.38 \end{bmatrix}$;

(3) $C=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 5 & \frac{10}{3} & \frac{5}{2} \\ \frac{100}{3} & 25 & 20 \end{bmatrix}$.

4. 利用 Doolittle 分解法解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 8.1x_1+2.3x_2-1.5x_3=6.1 \\ 0.5x_1-6.23x_2+0.87x_3=2.3 \\ 2.5x_1+1.5x_2+10.2x_3=1.8 \end{cases}$,

取 4 位有效数字;

(2) $\begin{cases}10x_1+7x_2+8x_3+7x_4=10\\7x_1+5x_2+6x_3+5x_4=8\\8x_1+6x_2+10x_3+9x_4=6\\7x_1+5x_2+9x_3+10x_4=7\end{cases}$

5. 用追赶法解下列方程组.

(1) $\begin{cases}3x_1+x_2=-1\\2x_1+4x_2+x_3=7\\2x_2+5x_3=9\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}0.5x_1+0.25x_2=0.35\\0.35x_1+0.8x_2+0.4x_3=0.77\\0.25x_2+x_3+0.5x_4=-0.5\\x_3+2x_4=-2.25\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}4x_1+x_2=1\\x_1+4x_2+x_3=0.5\\x_2+4x_3+x_4=-1\\x_3+4x_4+x_5=3\\x_4+4x_5=-2\end{cases}$;

取 4 位有效数字.

6. 设函数 $g(x)$ 在闭区间 $I=[x_0-r,x_0+r]$ 上可导,并且满足

$$|g(x_0)-x_0|<(1-\alpha)r;\quad |g'(x)|\leqslant\alpha<1;\quad x\in I$$

证明方程 $x=g(x)$ 在 I 上有唯一解 x^*,且 x^* 是序列 $\{x_n\}$ 的极限,此处 $x_n=g(x_{n-1})$, $n=1,2,\cdots$.

7. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集,映射 $G:D\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\|G(x)-G(y)\|<\|x-y\|,\quad x,y\in D,\quad x\neq y,$$

且 $G(D)\subset D$. 证明 G 在 D 上有且仅有一个不动点.

8. 用 Jacobi 迭代法和 Seidel 迭代法解方程组

$$\begin{cases}20x_1+2x_2+3x_3=24\\x_1+8x_2+x_3=12\\2x_1-3x_2+15x_3=30\end{cases},$$

取初始向量 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$,当 $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty\leqslant10^{-5}$ 时终止迭代.

9. 判断方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式和 Seidel 迭代格式的收敛性,其中

(1) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$; (2) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$;

(3) $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$; (4) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 6 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

10. 用 SOR 迭代法(取 $\omega=1.46$)解方程组

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 = 1\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1\\ -x_3 + 2x_4 = 0\end{cases},$$

取初始向量 $x^{(0)}=(1,1,1,1)^T$,当 $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty\leqslant10^{-5}$时终止迭代.

11. 对方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=6\\ x_1+4x_2=8\\ 2x_1+x_3=2\end{cases}$$

适当调整未知量的排列顺序,使所得方程组的 Seidel 迭代格式收敛.

12. 设方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵正定,β 是 A 的特征值的最大值,证明当 $\omega\in(0,\frac{2}{\beta})$时,对任意初始向量 $x^{(0)}$,按迭代格式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)})$$

生成的迭代序列$\{x^{(k)}\}$都收敛于方程组的解.

13. 用简单迭代法解方程 $9x^2-\sin x-1=0$. 取初始值 $x^{(0)}=0.4$,当 $|x^{(k)}-x^{(k-1)}|\leqslant10^{-9}$时终止迭代.

14. 用 Newton 法解方程 $x^3+2x^3+10x-20=0$. 取初始值 $x^{(0)}=1$,当 $|x^{(k)}-x^{(k-1)}|\leqslant10^{-9}$时终止迭代.

15. 用 Newton 法解方程组

$$\begin{cases}3x_1 - \cos(x_2x_3) - 0.5 = 0\\ 2x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0\\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10}{3}\pi - 1 = 0\end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)}=(0.1,0.1,-0.1)^T$,迭代 5 次.

16. 用 Newton 法给出求 $c>0$ 的 n 次方根的迭代格式.

第六章　广义 Fourier 级数与最佳平方逼近

本章在讨论内积空间和 Hilbert 空间的几何性质(如正交投影和正交分解)的基础上，着重研究在理论和应用中都非常重要的广义 Fourier 级数和最佳平方逼近．

在研究函数 $f\in L^2[a,b]$的广义 Fourier 级数展开的具体方法中，将介绍在实际应用中常用的 Legendre 正交多项式系和几种关于权函数的正交多项式系．另外再介绍在实验数据处理中常用的曲线拟合的最小二乘法．

§6.1　正交投影和广义 Fourier 级数

在$\mathbb{R}^3$ 中，易知任一向量在任何过原点的平面(即$\mathbb{R}^3$ 的含零元素的子空间)上都有它的投影．类似地在 Hilbert 空间中也可以建立相应的正交投影和正交分解的理论．

§1.3 讨论了内积空间的标准正交系．本节将介绍完全标准正交系的概念，研究标准正交系成为完全标准正交系的等价条件以及空间中任一向量在完全标准正交系下的广义 Fourier 级数．

一、正交投影与正交分解

在$\mathbb{R}^3$ 中，设 M 是$\mathbb{R}^3$ 中包含零元素 0 的平面，则 M 是$\mathbb{R}^3$ 的完备子空间．如图 6-1，若 x 是$\mathbb{R}^3$ 中任意一个向量，则必存在 $y_0\in M$ 和 $x_0\perp M$，使得

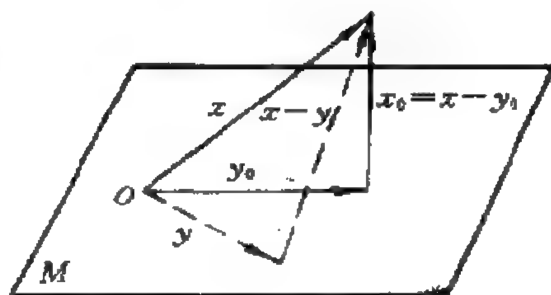

图 6-1

$$x=y_0+x_0,$$

其中 y_0 是 x 在 M 上的投影，$\|x_0\|$ 是向量 x 到平面 M 的距离，即

$$\|x_0\|=d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

将上述很直观的投影概念推广到内积空间，有下面的定义.

定义 6.1　设 X 是内积空间，M 是 X 是子空间，$x\in X$. 若存在 $y_0\in M$ 和 $x_0\perp M$，使得

$$x=y_0+x_0, \tag{6.1}$$

则 y_0 称为 x 在 M 上的**正交投影**（简称为投影），(6.1)式称为 x 的**正交分解**.

必须注意，当 X 是内积空间时，并不能保证 X 中每一个元素 x 在 X 的任意子空间 M 上的投影都存在. 但是可以断言，若 x 在 M 上的投影存在，则投影必定是唯一的.

定理 6.1　设 X 是内积空间，M 是 X 的子空间，$x\in X$. 若 x 在 M 上的投影 y_0 存在，则 x 在 M 上的投影 y_0 是唯一的，并且

$$\|x-y_0\|=d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|. \tag{6.2}$$

证明　唯一性. 假若 y_0 和 y_1 都是 x 在 M 上的投影，由定义知，$y_0,y_1\in M$ 且 $x-y_0\in M^{\perp}$，$x-y_1\in M^{\perp}$. 由于 M 和 $M^{\perp}$ 都是 X 的子空间，故

$$y_0-y_1\in M,$$

且

$$y_0-y_1=(x-y_1)-(x-y_0)\in M^{\perp}.$$

由引理 1.5(2)得到 $y_0-y_1=0$，即 $y_0=y_1$. 唯一性得证.

由于 $y_0\in M$，$x-y_0\perp M$，则对任意 $y\in M$，有 $y_0-y\in M$ 且

$$x-y_0\perp y_0-y.$$

应用勾股定理（引理 1.5(1)），有

$$\|x-y\|^2=\|x-y_0\|^2+\|y_0-y\|^2\geqslant\|x-y_0\|^2.$$

所以

$$d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|\geqslant\|x-y_0\|.$$

然而 $y_0\in M$，故 $d(x,M)\leqslant\|x-y_0\|$. 因此(6.2)式成立. 证毕.

此定理表明，若 X 中的元素 x 在 X 的子空间 M 上的投影 y_0 存在，则用 M 中元素 y 来逼近 x 时，仅当 $y=y_0$ 时逼近程度最佳. 或者说 y 与 x 的误差 $\|x-y\|$，仅当 $y=y_0$ 时达到最小值 $d(x,M)$.

在什么条件下，可保证 X 的每一个元素 x 在 M 上的投影都存在？下面的定理回答了这一问题.

定理 6.2(投影定理) 若 M 是内积空间 X 的完备子空间，则 X 的每一个元素 x 在 M 上的投影都唯一地存在，即存在唯一的 $y_0\in M$ 和 $x_0\perp M$，使得

$$x=y_0+x_0.$$

证明 (a)先证明，对于每一个 $x\in X$，存在 $y_0\in M$，使得

$$\|x-y_0\|=d(x,M)=\lim_{y\in M}\|x-y\|.$$

令 $\delta=d(x,M)$，由下确界的定义，存在 $\{y_n\}\subset M$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=\delta.$$

现证 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 序列. 由平行四边形公式(引理 1.4)，得

$$2\left\|\frac{y_n-y_m}{2}\right\|^2=\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2-2\left\|\frac{y_n+y_m}{2}-x\right\|^2.$$

注意到 $\frac{y_n+y_m}{2}\in M$，从而 $\left\|\frac{y_n+y_m}{2}-x\right\|\geqslant\delta$，代入上式得

$$0\leqslant 2\left\|\frac{y_n-y_m}{2}\right\|^2\leqslant\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2-2\delta^2.$$

当 $m,n\to\infty$ 时，必有 $\|y_n-y_m\|\to 0$，故 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 序列.

由于 M 是完备的，可设 $y_n\to y_0\in M$，于是

$$\|x-y_0\|=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=\delta.$$

(b)再证明，$x-y_0\perp M$.

令 $x_0=x-y_0$. 任取 $z\in M$ 且 $z\neq 0$，对任意 $\alpha\in\mathbb{K}$ 有 $y_0+\alpha z\in M$. 故

$$(d(x,M))^2\leqslant \|x-(y_0+\alpha z)\|^2=\langle x_0-\alpha z,x_0-\alpha z\rangle$$
$$=\|x_0\|^2-\bar{\alpha}\langle x_0,z\rangle-\alpha\langle z,x_0\rangle+|\alpha|^2\|z\|^2.$$

由(a)，$\|x_0\|=d(x,M)$，于是上式化为

$$\bar{\alpha}\langle x_0,z\rangle+\alpha[\langle z,x_0\rangle-\bar{\alpha}\|z\|^2]\leqslant 0.$$

为使方括号内的表示式为零，令

$$\bar{\alpha}=\frac{\langle z,x_0\rangle}{\|z\|^2},$$

则得到

$$\frac{\langle z,x_0\rangle}{\|z\|^2}\langle x_0,z\rangle=\frac{|\langle x_0,z\rangle|^2}{\|z\|^2}\leqslant 0.$$

因此，只有当 $\langle x_0,z\rangle=0$ 时，上面的不等式才能成立. 于是 $x_0\perp z$. 由 z 的任意性，得 $x-y_0\perp M$.

(c)令 $x_0=x-y_0$，由(a)和(b)知，存在 $y_0\in M$ 和 $x_0\perp M$ 满足 $x=y_0+x_0$，故 y_0 是 x 在 M 上的投影. 由定理 6.1，x 在 M 上的投影 y_0 是唯一的. 证毕.

综合上述二定理可知，在定理 6.2 的条件下，X 的每一个元素 x 在 M 上存在唯一的投影，而且

$$\|x-y_0\|=d(x,M).$$

利用线性空间的子空间的直和的定义(见定义 1.12(2))，定理 6.2 有如下推论.

推论 1 若 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，则

$$H=M\oplus M^{\perp}.$$

推论 2 若 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，则

$$M=M^{\perp\perp}.$$

特别地，当 $M^{\perp}=\{0\}$ 时，$M=H$.

证明 对任意 $x\in M$，有 $x\perp M^{\perp}$，即 $x\in M^{\perp\perp}$. 因此 $M\subset M^{\perp\perp}$. 另一方面，对任意 $x\in M^{\perp\perp}$，由推论 1 得到 $x=y_0+x_0$，其中 $y_0\in M$，$x_0=x-y_0\in M^{\perp}$. 注意到 $y_0\in M\subset M^{\perp\perp}$，因此，由引理 1.5 (2) 得 $x-y_0=0$，即 $x=y_0\in M$. 所以 $M^{\perp\perp}\subset M$. 综上，$M=M^{\perp\perp}$ 得证.

由于内积空间的有限维子空间是完备的，因此对于这些子空间，定理 6.2 成立. 在下一节，将专门说明定理 6.2 在最佳逼近理论中的应用.

二、Fourier 系数与 Bessel 不等式

由定义 1.23 知，内积空间 X 的非空子集 M 是 X 的标准正交系，是指对于任意 $x,y\in M$ 有

$$\langle x,y\rangle=\begin{cases}0 & \text{当 } x\neq y\\ 1 & \text{当 } x=y\end{cases}.$$

例 6.1 若实内积空间 $C[0,2\pi]$ 中任意二元素 x 和 y 的内积定义为

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

令 $u_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$u_n(t)=\cos nt$，$v_n(t)=\sin nt\quad(n\in N)$，则

$$\{u_0,u_1,v_1,u_2,v_2,\cdots,u_n,v_n,\cdots\}$$

是 $C[0,2\pi]$ 的标准正交系. 每一个 $x\in C[0,2\pi]$ 关于此标准正交系可以展开为 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\mathrm{d}t=\sqrt{2}\langle x,u_0\rangle,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\mathrm{d}t=\langle x,u_n\rangle,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\sin nt\mathrm{d}t = \langle x, v_n\rangle, (n \in N).$$

在数学分析中，$a_0, a_n, b_n (n \in N)$ 称为 x 关于此标准正交系的 Fourier 系数．

在内积空间中，可类似定义 Fourier 系数如下．

定义 6.2 设 $F = \{e_i\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$x \in X$，则内积 $\langle x, e_i\rangle$ 称为 x 关于 F 的**广义 Fourier 系数**，或简称为 Fourier 系数．

利用广义 Fourier 系数，可以给出投影的表示式．

定理 6.3 设 $\{e_i\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$x \in X$，$M = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$，则

(1) x 在 M 上的投影 x_0 可表示为

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i;$$

(2) $\| x_0 \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$;

(3) $\| x - x_0 \|^2 = \| x \|^2 - \| x_0 \|^2$.

证明 (1) 只要证 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ 是 x 在 M 上的投影，从而由投影的唯一性，立即得证．

显然，$x_0 \in M$. 由于对每一个 $j = 1, \cdots, n$，有

$$\begin{aligned}\langle x - x_0, e_j\rangle &= \langle x, e_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, e_j\rangle \\ &= \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0,\end{aligned}$$

即 $x - x_0$ 与 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 正交，故 $x - x_0 \perp M^{\perp}$. 由定义 6.1 知，x_0 是 x 在 M 上的投影．

(2) 由勾股定理

$$\| x_0 \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| \langle x, e_i\rangle e_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

(3) 由于 $x=x_0+(x-x_0)$ 且 $x_0\perp x-x_0$，再应用勾股定理

$$\|x\|^2=\|x_0\|^2+\|x-x_0\|^2,$$

故 $\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2$ 证毕.

定理 6.4 设 $\{e_i\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，则对于每一个 $x\in X$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{6.3}$$

此不等式称为 **Bessel 不等式**.

证明 由定理 6.3，对任意 $n\in N$ 都有

$$\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

令 $n\to\infty$，则 Bessel 不等式(6.3)得证.

推论 设 $\{e_i\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，则对于每一个 $x\in X$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0.$$

三、完全标准正交系及其等价条件

当 X 是 n 维内积空间时，若 X 的一个标准正交系 F 选够了 n 个元素，记 $F=\{e_1,\cdots,e_n\}$，则易知如下结论成立：

(1) $\operatorname{span}F=X$；

(2) 每一个 $x\in X$ 皆可表示为

$$x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i;$$

(3) 对每一个 $x\in X$，$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2$，即 Bessel 不等式成为等式.

若 X 的标准正交系 F 没有选够 n 个元素，上述各个结论不再成立.

当考虑无限维内积空间时，空间中的一个标准正交系为无限集，其中的元素是否"选够"的含义表示在下述定义中.

定义 6.3 若 $F=\{e_i\}$ 是内积空间 X 的正交系，并且满足

$$\overline{\text{span}F}=X,$$

则正交系 F 称为**完全系**，或者称 F 为 X 中的完全正交系．

若 $F=\{e_i\}$ 是内积空间 X 的标准正交系，并且 F 是完全系，则 F 称为 X 中的**完全标准正交系**．

在 Hilbert 空间中，根据完全标准正交系的定义，可以将上述对于有限维内积空间的结论推广到 Hilbert 空间．在下面的定理中，具体表达了完全标准正交系的几个等价条件．

定理 6.5 若 $F=\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系，则下列各条件等价：

(1) F 是 H 的完全标准正交系．

(2) $F^{\perp}=\{0\}$，即 H 中不存在与 F 中的所有元素正交的非零元素．

(3) 对每一个 $x\in H$，有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i .$$

(4) 对每一个 $x\in H$，有

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2 .$$

此等式称为 **Parseval 恒等式**．

证明 (1)⇒(2) 对任意 $x\in F^{\perp}$，只需证明 $x=0$. 由于 F 是 H 中的完全标准正交系，则 $x\in H=\overline{\text{span}F}$. 于是存在序列 $\{x_n\}\subset \text{span}F$，使得 $x_n\to x$. 因 $x\in F^{\perp}$，则对每一个 $n\in N$ 有 $\langle x_n,x\rangle=0$. 由内积的连续性

$$\langle x,x\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,x\rangle=0,$$

故 $x=0$.

(2)⇒(1) 假设 $F^{\perp}=\{0\}$，由于 $F\subset\overline{\text{span}F}$，则

$$\{0\}\subset(\overline{\text{span}F})^{\perp}\subset F^{\perp}=\{0\},$$

故必有$(\overline{\text{span}F})^{\perp}=\{0\}$. 应用定理 6.2 的推论 1，得到

$$H=\overline{\text{span}F}\oplus(\overline{\text{span}F})^{\perp}=\overline{\text{span}F}.$$

(2)⇒(3) 对每一个 $x\in H$，由 Bessel 不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2,$$

则可断言 $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$ 收敛. 事实上，由上式知，级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$ 绝对收敛. 由于 H 是完备的，应用定理 3.5，则此级数收敛，即存在 $y\in H$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i=y.$$

现在只要证明 $x=y$，则(3)得证. 对每一个 $e_j\in F$，由内积的连续性

$$\begin{aligned}\langle x-y,e_j\rangle&=\langle x,e_j\rangle-\Big\langle\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i,e_j\Big\rangle\\&=\langle x,e_j\rangle-\sum_{i=1}^{\infty}(\langle x,e_i\rangle\langle e_i,e_j\rangle)\\&=\langle x,e_j\rangle-\langle x,e_j\rangle=0.\end{aligned}$$

由假设条件，得到 $x-y\in F^{\perp}=\{0\}$，即 $x=y$.

(3)⇒(4) 对每一个 $x\in H$，由(3)成立，则

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\Big\langle\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i,\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle e_j\Big\rangle\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\langle x,e_i\rangle\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle e_i,e_j\rangle)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(\langle x,e_i\rangle\overline{\langle x,e_i\rangle})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2.\end{aligned}$$

(4)⇒(2) 对任意 $x\in F^{\perp}$，即对每一个 $e_i\in F$ 都有$\langle x,e_i\rangle=0$，由于 Parseval 恒等式成立，则

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2=0,$$

故 $x=0$.因此 $F^{\perp}=\{0\}$. 证毕.

由此定理关于(1)和(3)等价的结论,可给出如下定义.

定义 6.4 若 $F=\{e_i\}$是 Hilbert 空间 H 的完全标准正交系,则每一个 $x\in H$ 可展开为无穷级数,即

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i.$$

此无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$ 称为 x 关于 F 的**广义 Fourier 级数**,或简称为 Fourier 级数.

值得注意,在此定义中的元素 x 的广义 Fourier 级数的前 n 项和

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$$

正是 x 在 span$\{e_1,\cdots,e_n\}$上的投影(见定理 6.3(1)),并且 $\|x-s_n\|$ 是 x 到 span$\{e_1,\cdots,e_n\}$的距离.

§6.2 函数的最佳平方逼近

实际应用中,常用的函数空间有 $C[a,b]$,$L^p[a,b]$($1\leqslant p\leqslant\infty$),其中 $L^2[a,b]$是 Hilbert 空间. 下面,在一般的赋范线性空间上,将最佳逼近问题用泛函分析的语言给一个准确的定义.

定义 6.5 设 X 是赋范线性空间,M 是 X 的子空间,$x\in X$. 若存在 $y_0\in M$,使得

$$\|x-y_0\|=d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|,$$

则称 y_0 为 x 在 M 上的**最佳逼近**.

当 X 是内积空间且 M 是 X 的完备子空间时(特别是,当 M 是 X 的有限维子空间时),由定理 6.1 和定理 6.2 知,X 的每一个

元素 x 在 M 上存在唯一的投影 y_0，并且 y_0 正是 x 在 M 上的最佳逼近．因此在这种条件下，最佳逼近的存在唯一性问题得到了解决．

按照最佳逼近的定义，y_0 是 x 在 M 上的最佳逼近，换言之，就是用 M 中的任何元素逼近 x 所产生的误差中，以 y_0 逼近 x 所产生的误差为最小，且最小误差为 $\|x-y_0\|=d(x,M)$.

按照定义，最佳逼近与空间 X 的范数(或内积)有关．在 Banach 空间($C[a,b]$，$\|\cdot\|_\infty$)中的最佳逼近，常称为**最佳一致逼近**，而 Hilbert 空间 $L^2[a,b]$中的最佳逼近，常称为**最佳平方逼近**．

本节讨论函数空间 $L^2[a,b]$中任一元素(或称为$[a,b]$上的平方可积函数)在 $L^2[a,b]$的有限维子空间 M 上的最佳平方逼近．介绍求最佳平方逼近的两种方法．经比较，显示出在 M 中选用标准正交系为基时求最佳平方逼近方法的优点．

一、最佳平方逼近问题

定义 6.6 若 M 是 Hilbert 空间 $L^2[a,b]$的有限维子空间，则 $L^2[a,b]$中的每一个元素 f 在 M 上的投影 s^* 都唯一地存在(定理 6.2)，并且

$$\|f-s^*\|=d(f,M)=\inf_{s\in M}\left(\int_a^b|f(x)-s(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

s^* 称为 f 在 M 上的**最佳平方逼近**．

定义中，$L^2[a,b]$的范数(即由内积导出的范数)为 $\|\cdot\|_2$，在这一章中，简记为 $\|\cdot\|$.

下面介绍两种求 s^* 的方法.

方法 1

设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 M 的基(不必是 M 的标准正交系)，s^* 在此基下的表示式为

$$s^*=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n. \tag{6.4}$$

于是，问题归结为如何求出这一组数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使得 s^* 是 f 在 M

上的最佳平方逼近，即 s^* 是 f 在 M 上的投影．这时 $f=s^*+(f-s^*)$，其中 $s^*\in M$，$f-s^*\perp M$，并且

$$\|f-s^*\|=d(f,M).$$

因 $f-s^*\perp M$，故对每一个 $e_i\in M\ (i=1,\cdots,n)$，

$$\langle e_i,f-s^*\rangle=\langle e_i,f-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\rangle=\langle e_i,f\rangle-\sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_j\langle e_i,e_j\rangle=0.$$

于是，得到一个线性方程组

$$\begin{cases}\langle e_1,e_1\rangle\bar{\alpha}_1+\langle e_1,e_2\rangle\bar{\alpha}_2+\cdots+\langle e_1,e_n\rangle\bar{\alpha}_n=\langle e_1,f\rangle\\ \langle e_2,e_1\rangle\bar{\alpha}_1+\langle e_2,e_2\rangle\bar{\alpha}_2+\cdots+\langle e_2,e_n\rangle\bar{\alpha}_n=\langle e_2,f\rangle\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \langle e_n,e_1\rangle\bar{\alpha}_1+\langle e_n,e_2\rangle\bar{\alpha}_2+\cdots+\langle e_n,e_n\rangle\bar{\alpha}_n=\langle e_n,f\rangle\end{cases}$$

由于 s^* 存在且唯一，因而 $\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n$ 存在且唯一．因此线性方程组的 Gram 行列式

$$G(e_1,\cdots,e_n)=\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle\end{vmatrix}\neq 0, \tag{6.5}$$

并且

$$\bar{\alpha}_j=\frac{G_j}{G(e_1,\cdots,e_n)}\quad(j=1,\cdots,n), \tag{6.6}$$

其中 G_j 是行列式 $G(e_1,\cdots e_n)$ 的第 j 列 $(\langle e_1,e_j\rangle,\cdots,\langle e_n,e_j\rangle)^T$ 换为 $(\langle e_1,f\rangle,\cdots,\langle e_n,f\rangle)^T$ 后得到的行列式．取 $\bar{\alpha}_j$ 的共轭复数便得到 $\alpha_j(j=1,\cdots,n)$，代入(6.4)式，即可得到 s^*．

注 1 如果空间 $L^2[a,b]$ 是实空间，那么 $\bar{\alpha}_j=\alpha_j$．这时(6.6)式成为

$$\alpha_j=\frac{G_j}{G(e_1,\cdots,e_n)}\quad(j=1,\cdots,n). \tag{6.7}$$

注 2 最佳平方逼近的误差 $\|f-s^*\|$．

令 $\delta=\|f-s^*\|$．因 $f-s^*\perp s^*$，则

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \| f-s^* \|^2=\langle f-s^*,f-s^*\rangle \\ &=\langle f-s^*,f\rangle-\langle f-s^*,s^*\rangle=\langle f-s^*,f\rangle \\ &=\| f\|^2-\sum_{i=1}^{n}a_i\langle e_i,f\rangle. \end{aligned} \tag{6.8}$$

方法 2

若M的基$\{e_1,\cdots,e_n\}$是M的标准正交系，则$G(e_1,\cdots,e_n)=1$，$G_i=\langle e_i,f\rangle$，$a_i=\overline{\langle e_i,f\rangle}$. 于是

$$s^*=\sum_{i=1}^{n}\langle f,e_i\rangle e_i.$$

最佳平方逼近的误差δ的平方，由(6.8)式得

$$\delta^2=\| f-s^*\|^2=\| f\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle f,e_i\rangle|^2.$$

显然，上面两个式子可以从定理 6.3 直接得到，不必从方法 1 推出. 此方法简洁清楚.

二、多项式逼近

当$L^2[a,b]$的有限维子空间$M=P_n[a,b]$(即$[a,b]$上的所有次数小于或等于n的多项式的全体组成的$n+1$维空间)时，$L^2[a,b]$中的元素f在$P_n[a,b]$上的最佳平方逼近s_n^*是一个次数小于或等于n的多项式. 此s_n^*称为f在$P_n[a,b]$上的**n次最佳平方逼近**，简称为f的n次最佳平方逼近.

先按照前面介绍的方法 1，求f的n次最佳平方逼近s_n^*，举一例说明如下.

例 6.2 记$e_i(x)=x^i(x\in[0,1],i=0,1,\cdots,n)$，则$\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$是$P_n[0,1]$的基. 设$f(x)=e^x(x\in[0,1])$，则$f\in C[0,1]\subset L^2[0,1]$.

(1) 求f在$P_n[0,1]$上的n次最佳平方逼近s_n^*；

(2) 当$n=2$时，求f的二次最佳平方逼近.

解 (1)对$i,j=0,1,\cdots,n$，

$$\langle e_i, e_j \rangle = \int_0^1 x^{i+j} \mathrm{d}x = \frac{1}{i+j+1}.$$

记 $d_i = \langle e_i, f \rangle = \int_0^1 x^i f(x) \mathrm{d}x \quad (i=0,1,\cdots,n)$. 由(6.7)式得

$$\alpha_j = \frac{G_j}{G(e_0, e_1, \cdots, e_n)} \quad (j=0,1,\cdots,n),$$

其中

$$G(e_0, e_1, \cdots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix},$$

而 G_j 是行列式 $G(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ 的第 j 列 $\left(\frac{1}{j}, \frac{1}{1+j}, \cdots, \frac{1}{n+j}\right)^T$ 换为 $(d_0, d_1, \cdots, d_n)^T$ 后得到的行列式. 求出 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 后, 则

$$s_n^* = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

(2) 当 $n=2$ 时,

$$G(e_0, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix},$$

而

$$d_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1,$$

$$d_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1,$$

$$d_2 = \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2,$$

(这里 e≈2.71828，)故

$$\alpha_0=\frac{\begin{vmatrix} e-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ e-2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}}{G(e_0,e_1,e_2)}=1.01299,$$

$$\alpha_1=0.85113, \quad \alpha_2=0.83918,$$

所以

$$s_2^*=1.01299+0.85113x+0.83918x^2.$$

其误差的平方

$$\begin{aligned}\delta^2&=\|f-s_2^*\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=0}^{2}\alpha_i\langle e_i,f\rangle\\&=\int_0^1 e^{2x}dx-\sum_{i=0}^{2}\alpha_i d_i=0.00004.\end{aligned}$$

注 3 应用 §5.1 关于病态矩阵的讨论，上例中 $G(e_0,e_1,\cdots,e_n)$对应的矩阵是病态的，且 n 越大病态越严重．因此，当原始数据有一个微小扰动时，按照方法 1 求出的 s_n^* 与 s_n^* 的真值相对误差很大．按照方法 2 求 s_n^* 则可避免病态的发生．

按照方法 2 求 $L^2[a,b]$的元素 f 在 $P_n[a,b]$上的 n 次最佳平方逼近 s_n^* 时，必须先求出 $P_n[a,b]$的标准正交系．具体作法如下：

记 $e_i(x)=x^i \quad (x\in[a,b],\ i=0,1,2,\cdots)$，则$\{e_0,e_1,e_2\cdots\}$是$L^2[a,b]$中的线性无关集，但不是正交系. 应用 Gram-Schmidt 标准正交化方法，可得到一个标准正交多项式系$\{p_0,p_1,p_2,\cdots\}$，使得对每一个 $n\in N$

$$P_n[a,b]=\text{span}\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}=\text{span}\{p_0,p_1,\cdots,p_n\}. \quad (6.9)$$

并且容易证明：

$$L^2[a,b]=\overline{\text{span}\{e_0,e_1,e_2,\cdots\}}=\overline{\text{span}\{p_0,p_1,p_2,\cdots\}},$$

即$\{p_0,p_1,p_2,\cdots\}$是$L^2[a,b]$的完全标准正交系.

这样,$L^2[a,b]$中的元素f在$P_n[a,b]$上的n次最佳平方逼近

$$s_n^*=\sum_{i=0}^{n}\langle f,p_i\rangle p_i, \tag{6.10}$$

误差的平方

$$\delta^2=\|f-s_n^*\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}|\langle f,p_i\rangle|^2. \tag{6.11}$$

应指出,对于实空间$L^2[a,b]$中的元素f,由内积表示的积分(例如

$$\langle f,p_i\rangle=\int_a^b f(x)p_i(x)\mathrm{d}x$$

中的积分)是 Lebesgue 积分. 当$f\in C[a,b]$时,此 Lebesgue 积分等于 Riemann 积分(即定积分).

注 4 若$\{p_0,p_1,p_2,\cdots\}$是$L^2[a,b]$的完全正交系且满足(6.9)式,但不是标准的,即每一个p_i的范数$\|p_i\|$并不都等于 1,则$L^2[a,b]$中的元素f在$P_n[a,b]$上的n次最佳平方逼近s_n^*由(6.10)式可表示为

$$s_n^*=\sum_{i=0}^{n}\langle f,\frac{p_i}{\|p_i\|}\rangle\frac{p_i}{\|p_i\|}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\langle f,p_i\rangle}{\langle p_i,p_i\rangle}p_i, \tag{6.12}$$

误差的平方由(6.11)式可表示为

$$\delta^2=\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}\left|\langle f,\frac{p_i}{\|p_i\|}\rangle\right|^2=\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}\frac{|\langle f,p_i\rangle|^2}{\langle p_i,p_i\rangle}. \tag{6.13}$$

§6.3 几种重要的正交多项式

一、Legendre 多项式

考虑实$L^2[-1,1]$空间. 记$e_i(x)=x^i\quad(x\in[-1,1],i=0,1,$

$2,\cdots)$. 现在应用 Gram-Schmidt 的方法，把$\{e_0,e_1,e_1,\cdots\}$化为标准正交系$\{u_0,u_1,u_2,\cdots\}$.

由于$\|e_0\|=\sqrt{2}$，令 $\mathrm{p}_0(x)=1\quad(x\in[-1,1])$，则

$$u_0(x)=\frac{e_0(x)}{\|e_0\|}=\sqrt{\frac{1}{2}}\mathrm{p}_0(x)=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \|u_0\|=1.$$

记 $v_1=e_1-\langle e_1,u_0\rangle u_0$，则 $v_1\perp u_0$，且

$$v_1(x)=x-\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=x,$$

$$\|v_1\|=\left(\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

令 $\mathrm{p}_1(x)=x$，则

$$u_1(x)=\frac{v_1(x)}{\|v_1\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}x=\sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{p}_1(x),\quad \|u_1\|=1.$$

记 $v_2=e_2-\langle e_2,u_0\rangle u_0-\langle e_2,u_1\rangle u_1$，则 $v_2\perp u_0,v_2\perp u_1$ 且

$$v_2(x)=x^2-\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}x^3\mathrm{d}x\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}x$$
$$=x^2-\frac{1}{3},$$

$$\|v_2\|=\left(\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

令 $\mathrm{p}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，则

$$u_2(x)=\frac{v_2(x)}{\|v_2\|}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1)=\sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{p}_2(x),\quad \|u_2\|=1.$$

依此方法继续下去，可以证明

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\mathrm{p}_n(x),\quad \|u_n\|=1,\qquad(6.14)$$

其中

$$\mathrm{p}_n(x)=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^i\frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!}x^{n-2i}. \qquad (6.15)$$

p_n 称为区间$[-1,1]$上的 n **阶 Legendre 多项式.**

n 阶 **Legendre** 多项式 p_n 还可以表示为微分形式，即

$$\mathrm{p}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]. \qquad (6.16)$$

(6.16)式也称为 n 阶 Legendre 多项式的 Rodrigues 表达式. 应用二项式公式展开$(x^2-1)^n$，再进行 n 次求导运算，便可从(6.16)式得到(6.15)式.

用 Rodrigues 表示式，很容易写出前几个 Legendre 多项式.

$$\mathrm{p}_0(x)=1,$$

$$\mathrm{p}_1(x)=x,$$

$$\mathrm{p}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$\mathrm{p}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$\mathrm{p}_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$\mathrm{p}_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

$$\cdots\cdots\cdots.$$

由于$\{u_0,u_1,u_2,\cdots\}$是$L^2[-1,1]$的完全标准正交系，则空间$L^2[-1,1]$中的每一个元素 f 可以展开为广义 Fourier 级数，即

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}(f,u_n)u_n. \qquad (6.17)$$

而 n 阶 Legendre 多项式 p_n 与 u_n 之间仅相差一个常数，因此$\{\mathrm{p}_0,\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\cdots\}$是$L^2[-1,1]$的完全正交系，并且

$$L^2[-1,1]=\overline{\mathrm{span}\{u_0,u_1,u_2,\cdots\}}=\overline{\mathrm{span}\{\mathrm{p}_0,\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\cdots\}}.$$

由(6.14)式，Legendre 多项式系$\{\mathrm{p}_0,\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\cdots\}$满足

$$\langle p_m, p_n\rangle=\begin{cases}0 & \text{当 } m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{当 } m=n\end{cases}$$

对于 $f\in L^2[-1,1]$，f 的广义 Fourier 级数(6.17)可表示为

$$\begin{aligned}f&=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\frac{p_n}{\|p_n\|}\rangle\frac{p_n}{\|p_n\|}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,p_n\rangle}{\langle p_n,p_n\rangle}p_n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\langle f,p_n\rangle p_n.\end{aligned}$$

注意，此等式表示无穷级数依 $L^2[-1,1]$ 的范数 $\|\cdot\|_2$（这里简记为 $\|\cdot\|$）收敛于 f，并称它在 $[-1,1]$ 上**平均收敛**于 $f(x)$.

归纳以上讨论，实际上已证明了下面的定理.

定理 6.6 对于每一个 $f\in L^2[-1,1]$，关于 Legendre 多项式系 $\{p_1,p_2,p_3,\cdots\}$，f 可以展开成广义 Fourier 级数（称为 Fourier-Legendre 级数），即

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\langle f,p_n\rangle p_n, \tag{6.18}$$

其中

$$\langle f,p_n\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)\mathrm{d}x .$$

须指出，广义 Fourier 级数在 $[-1,1]$ 上平均收敛并不能推出此级数在 $[-1,1]$ 上的一点处收敛或一致收敛. 关于广义 Fourier 级数在点 x_0 处收敛或一致收敛的条件，可见本节末的注 5.

例 6.3 将函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{当 } -1\leqslant x<0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ 1 & \text{当 } 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

展开成 Fourier-Legendre 级数.

解 由定理 6.6，函数 f 可以展开成形如(6.18)的 Fourier-Legendre级数．考虑

$$\langle f, p_n\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) p_n(x) dx.$$

易知当 n 为偶数时，$p_n(x)$ 为偶函数，故 $\langle f, p_n\rangle = 0$. 当 n 为奇数时，$p_n(x)$ 为奇函数，故

$$\langle f, p_n\rangle = 2\int_{0}^{1} p_n(x) dx.$$

因此，对于 $n = 1, 3, 5, \cdots$，

$$\langle f, p_1\rangle = 2\int_{0}^{1} x dx = 1,$$

$$\langle f, p_3\rangle = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) dx = -\frac{1}{4},$$

$$\langle f, p_5\rangle = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) dx = \frac{1}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots.$$

代入(6.18)式，则得到 f 的 Fourier-Legendre 级数展开式

$$f = \frac{3}{2}p_1 - \frac{7}{8}p_3 + \frac{11}{16}p_5 + \cdots.$$

根据上一节的注 3，可应用 Legendre 多项式系，求 $f \in L^2[a, b]$的 n 次最佳平方逼近．

由于 n 阶 Legendre 多项式 p_n 是一个区间$[-1,1]$上的 n 次多项式，而且

$$P_n[-1,1] = \text{span}\{p_0, p_1, \cdots, p_n\},$$

因此，对任意 $f \in L^2[-1,1]$，由(6.12)式知，f 在 $P_n[-1,1]$上的 n 次最平方逼近 s_n^* 可表示为

$$s_n^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, p_i\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} p_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{2i+1}{2} \langle f, p_i\rangle p_i. \qquad (6.19)$$

由(6.13)，误差的平方

$$\delta^2 = \| f - s_n^* \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{2i+1}{2} |\langle f, p_i \rangle|^2. \quad (6.20)$$

对于 $f \in L^2[a,b]$，作变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \quad (t \in [-1,1]),$$

（或 $t = \frac{1}{b-a}(2x-a-b)$），则 $F(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$ 变为 $[-1,1]$ 上的函数．于是可用 Legendre 多项式系求出 $F(t)$ 的 n 次最佳平方逼近 $s_n^*(t)$．因此 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近就是 $s_n^*\left(\frac{1}{b-a}(2x-a-b)\right)$，误差的平方

$$\delta^2 = \frac{b-a}{2}\left[\| F \|^2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{2i+1}{2} |\langle F, p_i \rangle|^2 \right].$$

下面举一例说明用 Legendre 多项式系求最佳平方逼近的方法．读者可将此方法与例 6.2 中的方法作一比较．

例 6.4 设 $f(x) = e^x \quad (x \in [0,1])$，求 f 在 $P_2[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近 s_2^*．

解 令 $x = \frac{1}{2}(t+1)$，则

$$F(t) = f\left(\frac{1}{2}(t+1)\right) = e^{\frac{1}{2}(t+1)} \quad (t \in [-1,1]).$$

F 关于 Legendre 多项式系的二次最佳平方逼近为

$$s_2^* = \frac{1}{2}\langle F, p_0 \rangle p_0 + \frac{3}{2}\langle F, p_1 \rangle p_1 + \frac{5}{2}\langle F, p_2 \rangle p_2.$$

由计算求出

$$\langle F, p_0 \rangle = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}(t+1)} \, dt = 2e - 2,$$

$$\langle F, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t e^{\frac{1}{2}(t+1)} \, dt = 2(3-e),$$

$$\langle F, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3t^2-1) e^{\frac{1}{2}(t+1)} \, dt = 14e - 38.$$

于是

$$s_2^*(t)=\mathrm{e}-1+3(3-\mathrm{e})t+\frac{1}{2}(35\mathrm{e}-95)(3t^2-1).$$

将 $t=2x-1$ 代入，则得 f 在 $P_2[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近

$$s_2^*(x)\approx 1.01299+0.85114x+0.83916x^2.$$

二、关于权函数的正交多项式系

定义 6.7 设实值函数 $\rho(x)$ 是开区间 (a,b) 内恒为正的 Lebesgue 可积函数，所有定义在闭区间 $[a,b]$ 上且满足条件

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2\mathrm{d}x<+\infty$$

的实值函数 f 的全体组成的线性空间记为 $L_\rho^2[a,b]$. 其中任意两个元素 f 和 g 的内积定义为

$$\langle f,g\rangle_\rho=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则不难验证 $(L_\rho^2[a,b],\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho)$ 是 Hilbert 空间，简记为 $L_\rho^2[a,b]$. $L_\rho^2[a,b]$ 称为以 $\rho(x)$ 为权函数的 Hilbert 空间. $\rho(x)$ 称为**权函数**.

对于 $f\in L_\rho^2[a,b]$，由内积导出的范数记为

$$\|f\|_{2,\rho}=\left(\int_a^b \rho(x)[f(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在不会引起混淆的情况下，以后将 $L_\rho^2[a,b]$ 的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ 和范数 $\|\cdot\|_{2,\rho}$ 分别简记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$.

$L_\rho^2[a,b]$ 的定义可类似的推广到 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 的情况.

$L^2[a,b]$ 是权函数为 1 的 Hilbert 空间.

对于 $f,g\in L_\rho^2[a,b]$，若 $\langle f,g\rangle=0$，即 f 和 g 在 $L_\rho^2[a,b]$ 中是正交的，则 f 和 g 称为**关于权函数 ρ 是正交的**. 同样地，$L_\rho^2[a,b]$ 中的正交系（标准正交系、完全标准正交系）可以称为关于权函数 ρ 的正交系（标准正交系、完全标准正交系）. 例如，$\{u_1,u_2,\cdots\}$ 是 $L_\rho^2[a,b]$ 中关于权函数 ρ 的完全标准正交系，是指 $\{u_1,u_2,\cdots\}$ 满足

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_a^b \rho(x) u_i(x) u_j(x) \mathrm{d}x$$
$$= \begin{cases} 0 & 当\ i \neq j \\ 1 & 当\ i = j \end{cases},$$

以及

$$\overline{\mathrm{span}\{u_1, u_2, \cdots\}} = L_\rho^2[a,b].$$

在空间 $L_\rho^2[a,b]$中，应用 Gram-Schmidt 正交化方法，同样可以把一个 $L_\rho^2[a,b]$中的线性无关集正交化，得到关于权函数 ρ 的标准正交系．

Legendre 多项式系是关于权函数 1 的完全正交系．

下面介绍三种常用的关于权函数的正交多项式．

1. Hermite 多项式

考虑以 $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 为权函数的实 Hilbert 空间 $L_\rho^2(-\infty, +\infty)$，其中任意二元素 f 和 g 的内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x) g(x) \mathrm{d}x .$$

记 $e_n(x) = x^n (n = 0, 1, 2 \cdots)$. 对线性无关集$\{e_0, e_1, e_2, \cdots\}$，应用 Gram-Schmidt 正交化方法，则可得到关于权函数 e^{-x^2}的完全标准正交系$\{h_0, h_1, h_2 \cdots\}$，其中

$$h_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \mathrm{H}_n(x) \quad (n = 0, 1, 2 \cdots) ,$$

而

$$\mathrm{H}_0(x) = 1,$$

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2}) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

H_n 称为 **n 阶 Hermite 多项式**．前几个 Hermite 多项式为

$$\mathrm{H}_0(x) = 1 ,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = 2x ,$$

$$\mathrm{H}_2(x) = 4x^2 - 2 ,$$

$$H_3(x)=8x^3-12x\ ,$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12\ ,$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x\ ,$$
$$\cdots\cdots$$

一般地，

$$H_{2m}(x)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{(2m)!}{i!(2m-2i)!}(2x)^{2m-2i},$$

$$H_{2m+1}(x)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{(2m+1)!}{i!(2m+1-2i)!}(2x)^{2m+1-2i}.$$

用分部积分法，可直接验证

$$\langle H_m,H_n\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx$$
$$=\begin{cases}0 & \text{当 } m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & \text{当 } m=n\end{cases}$$

2. Laguerre 多项式

考虑以 $\rho(x)=e^{-x}$ 为权函数的实 Hilbert 空间 $L_\rho^2[0,+\infty)$，其中任意二元素 f 和 g 的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)g(x)dx.$$

记 $e_n(x)=x^n(n=0,1,2\cdots)$．对线性无关集 $\{e_0,e_1,e_2,\cdots\}$，应用 Gram-Schmidt 正交化方法，则可得到关于权函数 e^{-x} 的完全标准正交系 $\{l_0,l_1,l_2,\cdots\}$，其中

$$l_n(x)=\frac{1}{n!}L_n(x),\ (n=0,1,2\cdots)\ .$$

而

$$L_0(x)=1\ ,$$
$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),\quad (n=1,2,\cdots)\ .$$

L_n 称为 n **阶 Laguerre 多项式**. 前几个 Laguerre 多项式为

$$L_0(x)=1\ ,$$

$$L_1(x) = -x+1,$$
$$L_2(x) = x^2-4x+2,$$
$$L_3(x) = -x^3+9x^2-18x+6,$$
$$L_4(x) = x^4-16x^3+72x^2-96x+24,$$
$$\cdots\cdots.$$

一般地，

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{(n!)^2 x^i}{(i!)^2(n-i)!}.$$

可直接验证

$$\langle L_m, L_n \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n \\ (n!)^2 & \text{当 } m = n \end{cases}$$

3. Чебышев 多项式

考虑以 $\rho(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 为权函数的实 Hilbert 空间 $L_\rho^2[-1,1]$，其中任意二元素 f 和 g 的内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} f(x) g(x) dx.$$

对于 $n=0,1,2\cdots$，令

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \ (x \in [-1,1]),$$

则 T_n 称为 n 阶（第一类）Чебышев 多项式

令 $\theta = \arccos x$，由三角恒等式

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta,$$

可得到递推关系式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

由 $T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$ 及上述递推关系式可知，$T_n(x)$ 是 n 次多项式．前几个 Чебышев 多项式为

$$T_0(x) = 1,$$
$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x)=2x^2-1\ ,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x\ ,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1\ ,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x\ ,$$
$$\cdots\cdots\ .$$

一般地，

$$T_{2m}(x)=m\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{(2m-i-1)!}{i!(2m-2i)!}(2x)^{2m-2i},$$

$$T_{2m+1}(x)=\frac{2m+1}{2}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{(2m-i)!}{i!(2m+1-2i)!}(2x)^{2m+1-2i}.$$

可直接验证(作变量代换 $x=\cos\theta$)

$$\langle T_m,T_n\rangle=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_m(x)T_n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}0 & \text{当 } m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{当 } m=n\neq 0.\\ \pi & \text{当 } m=n=0\end{cases}\tag{6.21}$$

令 $c_0=\pi^{-\frac{1}{2}}$，$c_n=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$　$(n=1,2,\cdots)$，则

$$\{c_0T_0,c_1T_1,c_2T_2,\cdots\}$$

是关于权函数$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$的完全标准正交系．

三、正交多项式的主要性质

为了方便今后的应用，现将几种正交多项式的主要性质集中罗列如下，以备查阅．

设 $L_\rho^2[a,b]$是以 $\rho(x)$为权函数的实 Hilbert 空间(a 为有限数或$-\infty$，b 为有限数或$+\infty$)，其中任意二元素 f 和 g 的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\ .$$

设$\{\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2\cdots\}$是关于权函数 $\rho(x)$的完全正交系且每一个$\Phi_n(x)$

是 x 的 n 次多项式($n=0,1,2,\cdots$). 令 $\varphi_n=\frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|}$, 则 $\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ 是关于权函数 $\rho(x)$ 的完全标准正交系.

这样, Legendre 多项式系、Hermite 多项式系、Laguerre 多项式系和 Чебышев 多项式系皆满足上述假设. 它们共有的性质用假设的记号表示如下:

(1) $P_n[a,b]=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}=\mathrm{span}\{\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2,\cdots\}$. 因此, 每一个 n 次多项式 Q_n 都可以表示为 $\Phi_0,\Phi_1,\cdots\Phi_n$ 的线性组合, 即

$$Q_n=\sum_{i=0}^{n}c_i\Phi_i.$$

(2) 任何次数低于 n 的多项式 Q 关于权函数 ρ 都与 Φ_n 正交, 即

$$\langle Q,\Phi_n\rangle=\int_a^b\rho(x)Q(x)\Phi_n(x)\mathrm{d}x=0\ ,$$

其中多项式 Q 的次数小于 n. 这是因为

$$\langle Q,\Phi_n\rangle=\langle\sum_{i=0}^{n-1}c_i\Phi_i,\Phi_n\rangle=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\langle\Phi_i,\Phi_n\rangle=0\ .$$

(3) 对于 $n\geqslant1$, $\Phi_n(x)$ 在开区间 (a,b) 内恰有 n 个不同的零点.

事实上, 当 $n\geqslant1$, 由于 $\langle\Phi_0,\Phi_n\rangle=0$, 即有

$$\int_a^b\rho(x)\Phi_n(x)\mathrm{d}x=0\ ,$$

而 $\rho(x)>0$ $(x\in(a,b))$, 则 $\Phi_n(x)$ 在开区间 (a,b) 内至少要改变符号一次, 即有零点. 设 $x_1,\cdots,x_m$ 是 $\Phi_n(x)$ 在 (a,b) 内的 m 个不同的零点. 因 $\Phi_n(x)$ 是 n 次多项式, 故 $m\leqslant n$.

另一方面, 令 $R_m(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$. 由于 $R_m(x)$ 与 $\Phi_n(x)$ 在 (a,b) 内有完全相同的零点, 则 $R_m(x)\Phi_n(x)$ 在 (a,b) 内不改变符号, 故

$$\int_a^b\rho(x)R_m(x)\Phi_n(x)\mathrm{d}x\neq0\ .$$

由性质(2),则得 $m \geq n$,因此 $m=n$.

(4) 关于权函数 $\rho(x)$ 的完全标准正交系 $\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$,每一个 $f\in L_\rho^2[a,b]$ 都可以展开成广义 Fourier 级数

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i, \tag{6.22}$$

或者

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\langle f,\Phi_i\rangle}{\langle\Phi_i,\Phi_i\rangle}\Phi_i. \tag{6.23}$$

(注意,以上级数依 $L_\rho^2[a,b]$ 的范数收敛.)

证明完全类似于定理 6.5.

(5) 设 M 是实 Hilbert 空间 $L_\rho^2[a,b]$ 的有限维子空间,则每一个 $f\in L_\rho^2[a,b]$ 在 M 上的投影 s^* 都唯一地存在,并且

$$\begin{aligned}\|f-s^*\|&=\inf_{s\in M}\|f-s\|\\&=\inf_{s\in M}\left(\int_a^b\rho(x)(f(x)-s(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

s^* 称为 f 在 M 上关于权函数 $\rho(x)$ 的最佳平方逼近.

当 $M=P_n[a,b]$ 时,$f\in L_\rho^2[a,b]$ 在 $P_n[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 的最佳平方逼近,称为 f 关于权函数 $\rho(x)$ 的 n 次最佳平方逼近,记为 s_n^*. 显然,s_n^* 是一个次数小于或等于 n 的多项式.

由于 $\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 是 $P_n[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 的完全标准正交系,完全类似于 §6.2 的讨论,可得到如下结论:

每一个 $f\in L_\rho^2[a,b]$ 在 $P_n[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 的 n 次最佳平方逼近

$$s_n^*=\sum_{i=0}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i,$$

误差的平方

$$\delta^2=\|f-s_n^*\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=0}^{n}|\langle f,\varphi_i\rangle|^2.$$

或者

$$s_n^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, \Phi_i \rangle}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle} \Phi_i ,$$

$$\delta^2 = \| f \|^2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{|\langle f, \Phi_i \rangle|^2}{\langle \Phi_i, \Phi_i \rangle} .$$

此外，几种正交多项式系还具有各自的一些特殊的性质．

① Legendre 多项式系 $\{p_0, p_1, p_2, \cdots\}$．它是关于权函数 $\rho(x)=1$ 的完全正交多项式系．这时，$L_\rho^2[-1,1]$ 就是 $L^2[-1,1]$．Legendre 多项式还具有如下性质：

(a) 当 n 为偶数时，$p_n(x)$ 为偶函数；当 n 为奇数时，$p_n(x)$ 为奇函数，即

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x) .$$

(b) $p_{2n+1}(0)=0$，　$p_{2n}(0)=(-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$，

$p_n(1)=1$，　$p_n(-1)=(-1)^n$．

(c) 对于 $n \geqslant 1$，如下递推公式成立：

$$(n+1)p_{n+1}(x)=(2n+1)xp_n(x)-np_{n-1}(x) ,$$

$$xp_n'(x)-p_{n-1}'(x)=np_n(x),$$

$$p_n'(x)-xp_{n-1}'(x)=np_{n-1}(x).$$

(d) n 阶 Legendre 多项式 p_n 满足如下 Legendre 微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 .$$

② Hermite 正交多项式系 $\{H_0, H_1, H_2, \cdots\}$．它是关于权函数 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 在 $L_\rho^2(-\infty,+\infty)$ 上的完全正交多项式系．Hermite 多项式还具有如下性质：

(a) 当 n 为偶数时，$H_n(x)$ 为偶函数；当 n 为奇数时，$H_n(x)$ 为奇函数．

(b) 对于 $n \geqslant 1$，如下递推公式成立：

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) ,$$

$$H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-H_{n-1}'(x),$$

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x) .$$

(c) n 阶 Hermite 多项式 H_n 满足如下 Hermite 微分方程

$$y''-2xy'+2ny=0.$$

③ Laguerre 正交多项式系 $\{L_0, L_1, L_2, \cdots\}$. 它是关于权函数 $\rho(x)=e^{-x}$ 在 $L^2_\rho[0,+\infty)$ 上的完全正交多项式系. Laguerre 多项式还具有如下性质:

(a) 对于 $n\geqslant 1$, 如下递推公式成立:

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x),$$

$$L_n'(x)=L_{n-1}'(x)-L_{n-1}(x),$$

$$xL_n'(x)=nL_n(x)-nL_{n-1}(x).$$

(b) n 阶 Laguerre 多项式 L_n 满足如下 Laguerre 微分方程

$$xy''+(1-x)y'+ny=0.$$

④ Чебышев 正交多项式系 $\{T_0, T_1, T_2, \cdots\}$. 它是关于权函数 $\rho(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 在 $L^2_\rho[-1,1]$ 上的完全正交多项式系. Чебышев 多项式还具有如下性质:

(a) 当 n 为偶数时, $T_n(x)$ 为偶函数; 当 n 为奇数时, $T_n(x)$ 为奇函数.

(b) 对于 $n\geqslant 1$, $T_n(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 内的 n 个不同的零点为

$$\cos\frac{2i-1}{2n}\pi, \quad (i=1,\cdots,n).$$

(c) $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 $n+1$ 个点

$$\cos\frac{i}{n}\pi \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

处轮流取得最大值 1 和最小值 -1.

(d) 对于 $n\geqslant 1$, 如下递推公式成立:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x).$$

$$(T_0(x)=1,\ T_1(x)=x.)$$

(e) n 阶 Чебышев 多项式 T_n 满足如下 Чебышев 微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0 .$$

注 5　每一个 $f\in L_\rho^2[a,b]$关于完全标准正交系$\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$都可以展开成广义 Fourier 级数

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i$$

(见(6.22)式). 上式右端的广义 Fourier 级数依 $L_\rho^2[a,b]$的范数收敛. 须注意,级数依 $L_\rho^2[a,b]$的范数收敛不能推出级数在$[a,b]$上一点处收敛或一致收敛. 若令

$$s_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i(x)\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

则广义 Fourier 级数 $\sum_{i=0}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i(x)$在点 $x_0\in[a,b]$是否收敛的问题,就是数列$\{s_n(x_0)\}$是否收敛的问题;在$[a,b]$上是否一致收敛的问题,就是连续函数列$\{s_n(x)\}$是否一致收敛的问题(或者说,$\{s_n\}$依 $C[a,b]$的范数收敛的问题(见§3.1 末的附录)). 下面的两个定理给出了关于这两种收敛的充分条件(参见[12]中§4.5 的定理 11 和定理 14 的推论 1).

定理 6.7　对于 $f\in L_\rho^2[a,b]$和 $x_0\in[a,b]$,记

$$F(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

若$\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$在 x_0 处有界(即 $|\varphi_n(x_0)|\leqslant M,n=0,1,2,\cdots$)且 $F\in L_\rho^2[a,b]$,则在 x_0 处

$$f(x_0)=\sum_{i=0}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i(x_0).$$

定理 6.8　若权函数 $\rho(x)\geqslant c>0(x\in(a,b))$,$f\in C^1[a,b]$,则广义 Fourier 级数 $\sum_{i=0}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$,即在一致收敛的意义下

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i(x) .$$

§6.4 曲线拟合的最小二乘法

前面讨论了在函数空间 $L^2[a,b]$以及 $L^2_\rho[a,b]$中的函数 f 的最佳平方逼近问题．本节将联系实验数据处理提出的实际问题，对函数 f(一种要认识的客观规律)，根据这些数据，用最小二乘法求 f 的近似表示式．

通常是从一组实验数据$(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_m,y_m)$中(设 $x_i\in[a,b](i=0,1,\cdots m)$)，寻求反映客观事物变化规律的函数关系 $y=f(x)$的最佳近似表示式 $y=s^*(x)$，这里

$$s^*\in M=\text{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\},$$

其中$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$是$[a,b]$上一组线性无关的函数(从而是 M 的基)，$n<m$. 由于

(1) 实验数据往往是由实测所得，本身并不精确；

(2) 仅能在节点处考虑 $s^*(x_i)$与 $f(x_i)$的误差，而无法在非节点处考虑它们的误差，因此，不必要求所求的函数 $y=s^*(x)$经过每一点(x_i,y_i)，仅要求所求的

$$s^*=\sum_{i=0}^{n}a_i^*\varphi_i\in\text{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\} \tag{6.24}$$

满足

$$\begin{aligned}(\|\delta\|_2)^2=\sum_{i=0}^{m}\delta_i^2&=\sum_{i=0}^{m}\{s^*(x_i)-f(x_i)\}^2\\&=\min_{s\in M}\sum_{i=0}^{m}\{s(x_i)-f(x_i)\}^2,\end{aligned} \tag{6.25}$$

其中 $\delta=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_m)$，$\delta_i=s^*(x_i)-f(x_i)\quad(i=0,1,\cdots,m)$.

满足上述要求，求逼近函数 s^* 的方法称为曲线拟合的最小二乘法．此方法的几何意义是明显的．

在实际应用中，常取 φ_k 为 k 次多项式($k=0,1,\cdots,n$)，这时 M

中的 s 和 s^* 都是次数小于或等于 n 的多项式.

最小二乘法有如下更一般的提法:求 $s^* \in M$ 使得加权平方和误差达到最小,即

$$(\|\delta\|_2)^2 = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)(s^*(x_i) - f(x_i))^2$$

$$= \min_{s \in M} \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)(s(x_i) - f(x_i))^2, \tag{6.26}$$

其中 $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数,满足 $\rho(x_i) > 0\ (i=0,1,\cdots,m)$. 有许多选择权函数的方法,以表示每一个数据 (x_i, y_i) 的权重. 例如,$\rho(x_i)$ 可表示数据 (x_i, y_i) 在实测中被重复得到的次数.

M 中任意函数 s 在基 $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ 下,可以表示为

$$s = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n.$$

要求 $s^* = \alpha_0^*\varphi_0 + \alpha_1^*\varphi_1 + \cdots + \alpha_n^*\varphi_n$ 满足(6.26),可以化为求多元函数

$$F(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)\left[\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\varphi_j(x_i) - f(x_i)\right]^2$$

的极小点 $(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*)$.

由多元函数极值存在的必要条件

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 2\sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)\left[\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\varphi_j(x_i) - f(x_i)\right]\varphi_k(x_i) = 0,$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n).$$

记

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i),$$

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \sum_{i=0}^{m} \rho(x_i) f(x_i)\varphi_k(x_i),$$

则得

$$\sum_{j=0}^{n} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \alpha_j = \langle f, \varphi_k \rangle \quad (k = 0, 1, \cdots, n). \tag{6.27}$$

线性方程组(6.27)称为**法方程**,其系数行列式为

$$G=\begin{vmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_0,\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle\varphi_n,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle & \cdots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{vmatrix}$$

由于$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$是线性无关的，容易证明$G\neq 0$. 所以线性方程组(6.2)有唯一解

$$\alpha_j=\alpha_j^* \quad (j=0,1,\cdots,n),$$

从而得到$s^*(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^*\varphi_j(x)$. 显然，$s^*$满足(6.27).

例 6.5　设有一组实验数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
$y_i=f(x_i)$	14.2	12.5	10.4	9.5	10.0	14.8

记$\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=x^2$. 求$y=f(x)$在$M=\text{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\}$上的拟合曲线$y=s^*(x)$.

解　设$s_2^*(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. 在此问题中，$m=5$，$n=2$，$\rho(x)=1$. 由计算得

$$\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle=6\ ,$$

$$\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle=\langle\varphi_1,\varphi_0\rangle=\sum_{i=0}^{5}x_i=21\ ,$$

$$\langle\varphi_0,\varphi_2\rangle=\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle=\langle\varphi_2,\varphi_0\rangle=\sum_{i=0}^{5}x_i^2=91\ ,$$

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle=\langle\varphi_2,\varphi_1\rangle=\sum_{i=0}^{5}x_i^3=441\ ,$$

$$\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle=\sum_{i=0}^{5}x_i^4=2275\ ,$$

$$\langle f,\varphi_0\rangle=\sum_{i=0}^{5}f(x_i)=71.4\ ,$$

$$(f,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{5} f(x_i)x_i=247.2,$$

$$(f,\varphi_2)=\sum_{i=0}^{5} f(x_i)x_i^2=1092.6.$$

因此,法方程为

$$\begin{cases} 6\alpha_0+21\alpha_1+91\alpha_2=71.4 \\ 21\alpha_0+91\alpha_1+441\alpha_2=247.2, \\ 91\alpha_0+441\alpha_1+2275\alpha_2=1092.6 \end{cases}$$

解得 $\alpha_0=19.59000, \alpha_1=-5.51678, \alpha_2=0.76607$. 因此

$$s_2^*(x)=19.59000-5.51678x+0.76607x^2.$$

对于一组已知的数据,如何选择拟合曲线的形式,这不单纯是数学问题,往往需要从所研究的实际问题中提供的数据来确定. 可以先将所给的数据在坐标平面上描点,通过观察来确定. 在此例中,用抛物线(二次多项式)作为拟合曲线较好.

例 6.6 试用经验公式

$$y=ae^{bx} \quad (a,b \text{ 为常数})$$

来拟合以下已知数据

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_1	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

解 对于经验公式 $y=ae^{bx}$的两边取对数得

$$\ln y=\ln a+bx.$$

令 $u=\ln y, A=\ln a$,则得

$$u=A+bx.$$

由数据(x_i,y_i)计算出(x_i,u_i),列表如下

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	2.72785	3.02042	3.31054	3.60004	3.89385	4.18357	4.47506	4.76728

现在可以用直线 $s_1(x)=A+bx$ 拟合上述数据，

解得

$$A=2.43685,\quad b=0.29121.$$

于是，$a=11.437$. 因此用最小二乘法求得的经验公式为

$$y=11.437e^{0.29121x}.$$

上面介绍的曲线拟合的最小二乘法与前面讨论过的函数的最佳平方逼近，虽然形式上有所不同，但是在实质上有很多类似之处. 若 $\varphi_i(x)=x^i(i=0,1,\cdots,n)$，以 $\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 为基张成的子空间 $\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 中求拟合曲线，则当 n 较大时，线性方程组(6.27)的系数矩阵往往是病态的. 为了避免病态的发生，应选用在点集 $\{x_i|i=0,1,\cdots,m\}$ 上的正交多项式(或关于权函数的正交多项式)组 $\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 为基来求拟合曲线(参见[15]).

习 题 六

1. 设 A 和 B 是内积空间 X 的子集，证明：

   (1) 若 $x\perp A$，则 $x\perp \overline{A}$；

   (2) $A^{\perp}=\left(\overline{\mathrm{span}A}\right)^{\perp}$.

2. 设 A 是 Hilbert 空间 H 的子空间，证明：$A^{\perp}=(\overline{A})^{\perp}$，$\overline{A}=(A^{\perp})^{\perp}$.

3. 设 $\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交系，$M=\mathrm{span}\{e_i\}$，$x\in H$. 证明 $x\in \overline{M}$ 的充分必要条件是，x 可以表示为

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i.$$

4. 设 $\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交系. 证明 $\{e_i\}$ 是完全标准正交系的充分必要条件是，对于任意 $x,y\in H$ 皆有

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_i\rangle}.$$

5. 将下列函数关于 Legendre 多项式系展开成广义 Fourier 级数.

   (1) $f(x)=x^3$.

(2) $f(x)=\begin{cases}0 & 当 -1\leqslant x<a \\ 1 & 当 a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$.

6. 在$[-1,1]$上，求函数$f(x)=|x|$在$\text{span}\{1,x^2,x^4\}$中的最佳平方逼近.

7. 求函数$f(x)=\frac{1}{x}$在区间$[1,2]$上的二次最佳平方逼近$s_2^*(x)$，并求误差$\|f-s_2^*\|_2$.

8. 利用 Legendre 多项式，在区间$[-1,1]$上，求函数$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$的三次最佳平方逼近$s_3^*(x)$，并计算误差的平方$(\|f-s_3^*\|_2)^2$.

9. 已知一组数据为

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1	-1	0	1	1

分别用一次、二次和三次多项式拟合以上数据.

10. 已知一组实验数据为

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	4	3	2	0	-1	-2	-5

用二次多项式拟合以上数据，并计算$(\|\delta\|_2)^2$.

附录　习题答案

习题二

1. (1) $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, $d_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$.

   (2) $d_1(\lambda)=1$, $d_2(\lambda)=\lambda+1$, $d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$.

   (3) $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$, $d_4(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$.

   (4) $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$, $d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$.

2. (1) $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$, $d_4(\lambda)=(\lambda+2)^4$; $(\lambda+2)^4$.

   (2) $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, $d_3(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2$, $d_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2$; $(\lambda+\alpha)^2$, $(\lambda+\alpha)^2$.

   (3) $d_1(\lambda)=1$, $d_2(\lambda)=\lambda+1$, $d_3(\lambda)=(\lambda+1)^2$; $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$.

   (4) $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$, $d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$; $(\lambda-1)^4$.

3. (1) $S(\lambda)=\mathrm{diag}(1,\lambda,\lambda(\lambda-1))$; $\lambda,\lambda,\lambda+1$;

   (2) $S(\lambda)=\mathrm{diag}(1,\lambda(\lambda+1),\lambda(\lambda+1)^2)$; $\lambda,\lambda,\lambda+1,(\lambda+1)^2$;

   (3) $S(\lambda)=\mathrm{diag}(1,\lambda(\lambda-1),\lambda(\lambda-1),\lambda^2(\lambda-1)^2)$; $\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$.

6. (1) $\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$;　(2) $\begin{bmatrix}1 & & \\ & i & \\ & & -i\end{bmatrix}$;

   (3) $\begin{bmatrix}1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & 1\end{bmatrix}$;　(4) $\begin{bmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0\end{bmatrix}$.

7. (1) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$;　(2) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -5\\ 1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

8. $C=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&0&0&0&-4\\0&1&0&0&12\\0&0&1&0&-13\\0&0&0&1&6\end{bmatrix}$.

9. $g(A)=\begin{bmatrix}-21&16&0\\-64&43&0\\19&-3&24\end{bmatrix}$.

10. $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$,

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_n}A^{n-1}-\frac{a_1}{a_n}A^{n-2}-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_n}E.$$

11. (1) $m(\lambda)=\lambda^2-81$;(2) $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$;(3) $m(\lambda)=(\lambda-3)^3$.

16. (1) $U=\begin{bmatrix}0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}&-i/2&-i/2\\1/\sqrt{2}&1/2&1/2\end{bmatrix}$,

$U^HAU=\begin{bmatrix}0&&\\&\sqrt{2}&\\&&-\sqrt{2}\end{bmatrix}$;

(2) $U=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-i/\sqrt{6}&i/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&i/\sqrt{6}&-i/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$,$U^HAU=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&i/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\\i/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&i/\sqrt{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,

$f=-2\bar{y}_1y_1-\bar{y}_2y_2+\bar{y}_3y_3$,不是正定的.

习题四

1. $\begin{bmatrix}e^{x_2}&x_1e^{x_2}&0\\0&1&\cos x_3\end{bmatrix}$.

2. $\frac{dA(t)}{dt}=\begin{bmatrix}-\sin t&\cos t\\-\cos t&-\sin t\end{bmatrix}$, $\frac{d}{dt}[\det A(t)]=0$, $\det\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)=1$.

3. $\begin{bmatrix} e-1 & 1 & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \cdots \\ 1-\cos 1 & \sin 1 & \cdots \end{bmatrix}^T$

12. $\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ & e^{-2t} & te^{-2t} \\ & & e^{-2t} \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

14. (1) $\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 & 0 \\ & e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ & & e^{-2t} & te^{-2t} \\ & & & e^{-2t} \end{bmatrix}$.

15. $e^{tA}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^t-12e^{2t}+13te^{2t} & -4e^t+4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^t+3e^{2t} & e^t \end{bmatrix}$,

$\sin(tA)=\begin{bmatrix} \sin 2t & 12\sin t-12\sin 2t+13t\cos 2t & -4\sin t+4\sin 2t \\ 0 & \sin 2t & 0 \\ 0 & -3\sin t+3\sin 2t & \sin t \end{bmatrix}$.

17. e^6.

18. $x_1=\frac{1}{10}(17e^{5t}+9e^{-t}+4e^{-15t})$, $x_2=\frac{1}{10}(-17e^{5t}-9e^{-5t}+6e^{-15t})$,

$x_3=\frac{1}{10}(17e^{5t}-9e^{-5t}+2e^{-15t})$.

习题五

1. (1) $x=(1, 1, 1)^T$, (2) $x=(-1, 2, 0, 1)^T$.
2. 用顺序 Gauss 消去法解得 $x=(-81.05, 72.43, 5.547)^T$, 用列主元素 Gauss 消去法解得 $x=(17.46, -45.76, 5.545)^T$.
3. $\text{cond}A=60002$, $\text{cond}B=235.2$, $\text{cond}C=4465$.

4. (1) $x=(0.8408, -0.2996, 0.01447)^T$;

   (2) $x=(-60, 102, -27, 1$[illegible]$)^T$.

5. (1) $x=(-1, 2, 1)^T$, (2) $x=(0.$[illegible]$2, 1, -0.25,$ [illegible]$)^T$,

   (3) $x=(0.1949, 0.2205, -0.5$[illegible]$69, 1.$[illegible]$067, -$[illegible]$8)^T$.

8. $x=(0.76735, 1.13841, 2.1$[illegible]$37)^T$.

9. (1) 不收敛,收敛.　　(2) 收敛,不收敛.

   (3) 收敛,收敛.　　(4) 收敛,收敛.

10. $x=(1.20000, 1.40000, 1.60000, 0.80000)^T$.

13. $x=0.391846907$.

14. $x=1.368808108$.

15. $x=(0.50000000, 0.00000000, -0.52359877)^T$.

习题六

5. (1) $x^3=\frac{2}{5}p_3(x)+\frac{3}{5}p_1(x)$.

   (2) $f=\frac{1}{2}(1-\alpha)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[p_{n+1}(\alpha)-p_{n-1}(\alpha)]p_n$.

6. $s^*(x)=0.11718+1.64067x^2-0.82037x^4$.

7. $s_2^*(x)=2.1175-1.4589x+0.3274x^2$, $\|f-s_2^*\|=0.00431$.

8. $s_3^*(x)=1.5532x-0.56223x^3$, $\|f-s_3^*\|^2=0.0000224$.

9. $s_1^*(x)=0.6x$, $s_2^*(x)=0.6x$, $s_3^*(x)=\frac{7}{6}x-\frac{1}{6}x^3$.

10. $s_2^*(x)=4.7143-0.6667x-0.09523x^2$, $\|\delta\|^2=0.95238$.